



Sapienza, Università di Roma
Dipartimento di Matematica "G.Castelnuovo"



Note di base di
Analisi Matematica
Parte quarta

versione 1.2 (8 settembre 2014)

Lamberto LAMBERTI
Corrado MASCIA



Licenza © 2008 Lamberto Lamberti & Corrado Mascia

Distribuzione Creative Commons

Tu sei libero di riprodurre, stampare, inoltrare via mail, fotocopiare, distribuire questa opera alle seguenti condizioni:

- * **Attribuzione:** devi attribuire la paternità dell'opera nei modi indicati dall'autore o da chi ti ha dato l'opera in licenza,
- * **Non commerciale:** non puoi usare quest'opera per fini commerciali,
- * **Non opere derivate:** Non puoi alterare o trasformare quest'opera, né usarla per crearne un'altra.

(Licenza Creative Commons *Attribuzione - Non commerciale - Non opere derivate 3.0*

Testo completo: <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/>)

Indice

Capitolo 1. I numeri complessi	1
1. Nascita dei numeri complessi e loro infanzia	1
2. Successioni, serie e continuità nei complessi	5
3. L'esponenziale complesso	10
Capitolo 2. Equazioni differenziali	13
1. Equazioni lineari del I ordine a coefficiente costante	13
2. Equazioni lineari del II ordine a coefficienti costanti omogenee	17
3. Equazioni lineari del II ordine a coefficienti costanti non omogenee	24
Capitolo 3. Lo spazio reale multidimensionale	29
1. Serve una struttura metrica	29
2. Quattro salti in \mathbb{R}^d : successioni di punti	34
3. Informazioni di base sulla topologia di \mathbb{R}^d	39
4. <i>Natura non facit saltus</i> : le curve	43
Capitolo 4. Funzioni di più variabili	55
1. Questioni elementari	55
2. Le derivate parziali	63
3. Integrali curvilinei	68
Capitolo 5. Funzioni continue	71
1. Limite di funzioni	71
2. La continuità	75
3. Teoremi fondamentali per le funzioni continue	82
4. Le conseguenze	85

CAPITOLO 1

I numeri complessi

Fino ad adesso abbiamo studiato funzioni reali di variabile reale. Vari problemi matematici suggeriscono un'estensione dell'insieme dei numeri reali, particolarmente utile anche per molte applicazioni. Questa estensione dei numeri reali porta ad un nuovo concetto di numero: il *numero complesso*.

1. Nascita dei numeri complessi e loro infanzia

Il problema di partenza è il seguente: *in \mathbb{R} esistono polinomi di grado maggiore di 1 che non hanno radici (reali)*, ad esempio, $x^2 + 1$. Si potrebbe rimanere lì a guardare, risponderci che è un fatto della vita, e passare ad un altro problema. Per chi invece desidera cercare di andare oltre, l'idea plausibile è di costruire un nuovo insieme che estenda l'insieme dei numeri reali e che contenga anche il “numero” i , *unità immaginaria*, soluzione dell'equazione $x^2 + 1 = 0$. Dedichiamoci alla costruzione di questo nuovo insieme, che indichiamo con il simbolo \mathbb{C} .

DEFINIZIONE 1.1. *Si definisce insieme dei numeri complessi \mathbb{C} l'insieme*

$$\mathbb{C} := \{z = a + ib : a, b \in \mathbb{R}\}$$

con la regola di calcolo seguente: i numeri complessi si sommano, sottraggono, moltiplicano, dividono tenendo conto della proprietà $i^2 = -1$.

La regola di calcolo di somma e moltiplicazione per numeri complessi va letta, in concreto, come segue: dati $z_1 = a + ib$ e $z_2 = c + id$, allora

$$z_1 + z_2 = (a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d),$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a + ib)(c + id) = ac + i(ad + bc) + i^2bd = (ac - bd) + i(ad + bc).$$

Tutte le proprietà di somma e moltiplicazione (commutativa, associativa, distributiva) valgono anche in \mathbb{C} .

Piccolo glossario per i numeri complessi

$z = a + ib$: numero complesso

$\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} : b = 0\}$: numeri reali

$i\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} : a = 0\}$: immaginari puri

i : unità immaginaria

$\operatorname{Re} z = a$: parte reale di z

$\operatorname{Im} z = b$: parte immaginaria di z

L'insieme \mathbb{C} può essere rappresentato geometricamente come un piano

$$\mathbb{C} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2.$$

La struttura di \mathbb{C} è comunque più ricca di quella del piano dato che in \mathbb{C} è *definita l'operazione di prodotto*.

I numeri complessi si devono poter rappresentare sempre nella forma $a+ib$. Nel caso del rapporto di due numeri, può non essere evidente che questo sia possibile. Vediamo un esempio particolare. Supponiamo di voler scrivere nella forma $a+ib$ con $a, b \in \mathbb{R}$ il numero complesso $z = \frac{1+i}{1-i}$. Moltiplicando e dividendo per $1+i$, e ragionando con le stesse regole algebriche note su \mathbb{R} insieme alla relazione $i^2 = -1$, si ottiene

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{1+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+2i+i^2}{1-i^2} = i.$$

In generale, per scrivere un rapporto di numeri complessi nella forma $a+ib$, procediamo alla stessa maniera. Siano $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ con $(c, d) \neq (0, 0)$, allora

$$\frac{a+ib}{c+id} = \frac{a+ib}{c+id} \cdot \frac{c-id}{c-id} = \frac{(ac+bd) + i(bc-ad)}{c^2+d^2}.$$

In particolare l'inverso del numero complesso $c+id$ si scrive come

$$\frac{1}{c+id} = \frac{1}{c+id} \cdot \frac{c-id}{c-id} = \frac{c-id}{c^2+d^2} = \frac{c}{c^2+d^2} - i \frac{d}{c^2+d^2},$$

che mostra che *ogni numero complesso z diverso da 0 è invertibile, cioè esiste un numero z^{-1} tale che $z \cdot z^{-1} = z^{-1} \cdot z = 1$* .

Dato $c+id \in \mathbb{C}$, il numero complesso $c-id \in \mathbb{C}$, che si ottiene cambiando di segno la parte immaginaria ha un ruolo determinante in questa costruzione ed è detto **complesso coniugato**. Il complesso coniugato di z si indica con \bar{z} .

ESERCIZIO 1.2. Verificare la validità di:

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \quad \overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2 \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \quad \frac{\bar{z}_1}{z_2} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}.$$

Rappresentazione polare. Un numero complesso $z = x+iy$ si può rappresentare come un punto P di coordinate (x, y) nel piano cartesiano e, in quanto tale, può essere individuato anche dalle coordinate polari (r, θ) :

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$

In questo caso $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ è la distanza del punto $P = (x, y)$ dall'origine O e θ

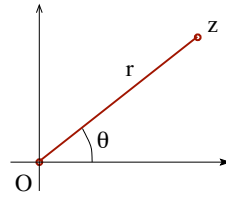


FIGURA 1. Rappresentazione polare di un numero complesso.

misura l'angolo tra il semiasse positivo x e il segmento di estremi 0 e z . Il numero complesso $z = x + iy$ si può, quindi, scrivere come

$$(1) \quad z = r(\cos \theta + i \sin \theta).$$

La quantità r è il **modulo** di z ; l'angolo θ si dice **argomento** di z e si indica con $\arg z$. Per via della periodicità delle funzioni \sin e \cos , l'argomento non è individuato univocamente. Si parla di **argomento principale** se $\theta \in [0, 2\pi)$ e si indica con $\text{Arg } z$ (Attenzione! c'è chi parla di "argomento principale" se $\theta \in (-\pi, \pi]$). Il complesso coniugato \bar{z} di z corrisponde al numero complesso di stesso modulo di z e argomento $-\theta$.

Tramite la rappresentazione polare è facile calcolare il prodotto di numeri complessi:

$$\begin{aligned} zz' &= r(\cos \theta + i \sin \theta) r'(\cos \theta' + i \sin \theta') \\ &= rr'[(\cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta') + i(\cos \theta \sin \theta' + \sin \theta \cos \theta')] \\ &= rr'[\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta')]. \end{aligned}$$

Questa formula permette di dare un'interpretazione geometrica del prodotto di due numeri complessi: il risultato è un numero complesso il cui modulo è pari al prodotto dei moduli e l'argomento è la somma degli argomenti. Ad esempio, che succede moltiplicando un generico numero complesso z per l'unità immaginaria i ? Dato che il modulo di i è 1 e il suo argomento è $\frac{\pi}{2}$, il numero iz si trova alla stessa distanza dall'origine di z e ha argomento aumentato di $\frac{\pi}{2}$ rispetto a quello di z . In definitiva, il numero iz si ottiene ruotando il punto z in senso antiorario di un angolo retto.

Dalla formula per il prodotto, segue la formula per la potenza n -esima di z

$$z^n = [r(\cos \theta + i \sin \theta)]^n = r^n [\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)].$$

Il modulo nei complessi. Il modulo del numero complesso $a + ib$ è il modulo del punto $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, cioè

$$\text{modulo di } z = a + ib : \quad |z| := \sqrt{a^2 + b^2}$$

Il modulo di un numero complesso è sempre un numero reale non negativo e gode delle stesse proprietà di cui gode il modulo reale

PROPOSIZIONE 1.3. *Il modulo complesso gode delle seguenti proprietà:*

- (i) $|z| \geq 0$ per ogni $z \in \mathbb{C}$ e $|z| = 0$ se e solo se $z = 0$;
- (ii) $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$ per ogni $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$;
- (iii) **diseguaglianza triangolare:** $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ per ogni $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

DIMOSTRAZIONE. La prima proprietà è evidente (basta osservare che una somma di quadrati è nulla se e solo se sono nulli entrambi gli addendi).

La seconda si verifica direttamente, se $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$, allora

$$\begin{aligned} |z_1 z_2| &= |(x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)| = \sqrt{(x_1 x_2 - y_1 y_2)^2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1)^2} \\ &= \sqrt{x_1^2 x_2^2 + y_1^2 y_2^2 + x_1^2 y_2^2 + x_2^2 y_1^2} \end{aligned}$$

$$|z_1| |z_2| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2} = \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)} = \sqrt{x_1^2 x_2^2 + x_1^2 y_2^2 + y_1^2 x_2^2 + y_1^2 y_2^2}.$$

Resta da dimostrare la disequaglianza triangolare. Per la definizione di modulo, la disequaglianza triangolare si riscrive come

$$(2) \quad \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2} \leq \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$$

Elevando al quadrato

$$(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 \leq x_1^2 + y_1^2 + 2\sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)} + x_2^2 + y_2^2$$

Sviluppando i quadrati dei due binomi a sinistra e semplificando,

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 \leq \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)}$$

Se il termine a sinistra è negativo, la disuguaglianza è verificata; altrimenti, elevando di nuovo al quadrato,

$$x_1^2 x_2^2 + 2x_1 x_2 y_1 y_2 + y_1^2 y_2^2 \leq (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) = x_1^2 x_2^2 + x_1^2 y_2^2 + y_1^2 x_2^2 + y_1^2 y_2^2.$$

Semplificando si ottiene $2x_1 x_2 y_1 y_2 \leq x_1^2 y_2^2 + y_1^2 x_2^2$, che si può riscrivere come

$$(x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 = x_1^2 y_2^2 - 2x_1 x_2 y_1 y_2 + y_1^2 x_2^2 \geq 0,$$

che è sempre vera. □

ESERCIZIO 1.4. *Verificare che, per ogni $z \in \mathbb{C}$, valgono (nella seconda $z \neq 0$)*

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2 \quad \text{e} \quad z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

Il fatto che in \mathbb{C} sia definito il modulo (con le stesse proprietà note in \mathbb{R}) è di fondamentale importanza: con quest'oggetto è possibile estendere ai complessi tutto quello che si è visto nei reali a partire dalla nozione di distanza.

Nel piano complesso \mathbb{C} , la distanza tra due numeri complessi z e z' è data da $|z - z'|$, dove $|\cdot|$ rappresenta il modulo complesso.

Grazie alla presenza della distanza, è possibile introdurre in \mathbb{C} il concetto di intorno.

DEFINIZIONE 1.5. Dato $z_0 \in \mathbb{C}$ e $r > 0$, l'intorno di z_0 di raggio r (indicato con $I(z_0; r)$) è l'insieme dei punti $z \in \mathbb{C}$ che distano da z_0 meno di r :

$$I(z_0; r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}.$$

Da qui limiti e tutto il resto...

Il Teorema fondamentale dell'algebra. Fin qui abbiamo scoperto che l'insieme \mathbb{C} gode delle stesse proprietà di \mathbb{R} per quanto riguarda le operazioni di somma e prodotto e anche per quanto riguarda la struttura metrica. Ma in \mathbb{C} , c'è qualcosa di più...

TEOREMA 1.6 (Teorema fondamentale dell'algebra). Ogni polinomio $p(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$ a coefficienti complessi $a_i \in \mathbb{C}$ di grado $n \geq 1$ ammette almeno uno zero $z^* \in \mathbb{C}$, cioè esiste $z^* \in \mathbb{C}$ tale che $p(z^*) = 0$.

Conseguenza di questo Teorema è che un polinomio di grado n in \mathbb{C} ha esattamente n zeri (contati con la loro molteplicità). Ad esempio, il polinomio a coefficienti reali

$$p(z) = z^2 + 2bz + c \quad b, c \in \mathbb{R},$$

ammette in \mathbb{C} sempre due zeri: se $b^2 > c$, gli zeri sono reali e sono $-b \pm \sqrt{b^2 - c}$, se $b^2 = c$ c'è un unico zero, $z = -b$, con molteplicità due, nel caso $b^2 < c$, gli zeri sono due numeri complessi coniugati, $-b \pm i\sqrt{c - b^2}$.

2. Successioni, serie e continuità nei complessi

Una volta definito l'insieme dei numeri complessi \mathbb{C} e introdotta la nozione di modulo, si può ripetere buona parte della teoria sviluppata in \mathbb{R} : successioni, serie, limiti, continuità, derivabilità... Ripercorriamo ora, rapidamente, quello che abbiamo visto nel caso reale, vedendo come sia possibile definire gli stessi oggetti nel caso complesso.

Successioni complesse. Una funzione che associa ad ogni numero naturale $n \in \mathbb{N}$ un valore $z_n \in \mathbb{C}$ è una **successione complessa**. Una successione complessa z_n può essere pensata come una famiglia di valori ordinati in base al loro indice n : z_0, z_1, z_2, \dots

DEFINIZIONE 2.1. Una successione complessa z_n è **convergente** a $\ell \in \mathbb{C}$ se

$$(3) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{tale che} \quad |z_n - \ell| < \varepsilon \quad \forall n > N.$$

Con una certa dose di fantasia, si scrive $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = \ell$.

Una successione z_n è **infinitesima** se converge a 0 per $n \rightarrow +\infty$.

Il modulo che compare in (3) è il modulo del numero complesso $z_n - \ell$, e l'essere infinitesima significa semplicemente che comunque si fissi un intorno dell'origine 0 (misurato dal valore di ε), tutti gli elementi della successione tranne al più un numero finito (controllato dall'indice N) si trovano nell'intorno fissato.

Dato che il modulo complesso di un numero reale coincide con l'usuale definizione di modulo di un numero reale, la Definizione 2.1 è, a tutti gli effetti, una estensione di quella già vista per le successioni reali.

OSSERVAZIONE 2.2. A guardar bene, la (3) dice che la successione di numeri reali non negativi $d_n := |z_n - \ell|$ tende a zero per $n \rightarrow +\infty$. Quindi una successione complessa z_n converge ad ℓ se e solo se la distanza di z_n da ℓ è infinitesima per $n \rightarrow +\infty$.

ESEMPIO 2.3. Un esempio interessante di successione complessa è

$$z_n = q^n \quad (q \in \mathbb{C}).$$

Dato che $|z_n| = |q^n| = |q|^n$, il comportamento della successione nel caso $|q| < 1$ è determinato da quello della successione reale $a_n = |q|^n$

$$|q| < 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0.$$

Cosa succede nel caso $|q| \geq 1$? Ad esempio, come si comportano le successioni complesse $z_n = (2i)^n$ e $w_n = i^n$ per $n \rightarrow \infty$?

Ad una successione complessa $z_n = x_n + iy_n$ sono associate in modo naturale le due successioni reali x_n e y_n della sua parte reale e immaginaria, rispettivamente. E' possibile dimostrare che

$$(4) \quad z_n = x_n + iy_n \quad \text{è convergente in } \mathbb{C} \quad \Longleftrightarrow \quad x_n, y_n \quad \text{sono convergenti in } \mathbb{R}.$$

Quindi trattare successioni complesse può essere visto come trattare contemporaneamente una coppia di successioni reali.

ESERCIZIO 2.4. (i) *Dimostrare che, per ogni $z \in \mathbb{C}$, vale*

$$\max\{|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z|\} \leq |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|.$$

(ii) *Utilizzare (i) per dimostrare l'equivalenza (4).*

La differenza sostanziale tra \mathbb{C} e \mathbb{R} sta nel fatto che *in \mathbb{C} non è definito un ordinamento*. Questo vuol dire che, per successioni complesse, non ha senso parlare di monotonia, né di divergenza a $+\infty$ e $-\infty$. Resta ben definito il concetto di divergenza in modulo: *la successione z_n diverge ad ∞ (o diverge in modulo), se la successione di numeri reali positivi $|z_n|$ diverge a $+\infty$.*

Serie complesse. Allo stesso modo, si possono considerare serie a termini complessi. Una serie complessa

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n$$

è convergente se, in \mathbb{C} , esiste il limite della successione complessa $s_n := \sum_{k=0}^n z_k$ (successione delle somme parziali). Tale limite è detto **somma della serie**.

ESEMPIO 2.5. Come nel caso reale, è possibile considerare la serie geometrica, definita dalla successione $z_n = q^n$ con $q \in \mathbb{C}$. La successione delle somme parziali è

$$s_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Quindi se $|q| < 1$, la serie converge e la sua somma è

$$(5) \quad \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1 - q} \quad q \in \mathbb{C} \quad \text{tale che} \quad |q| < 1.$$

Otteniamo quindi la stessa formula già vista nel caso reale.

Anche la nozione di convergenza assoluta si estende al caso complesso.

DEFINIZIONE 2.6. *La serie complessa $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ è assolutamente convergente se la serie reale $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ è convergente.*

Dato che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ è una serie a termini reali, è possibile, almeno in alcuni casi, ricondurre la convergenza di una serie complessa a quella di una serie reale, tornando quindi in un ambito più familiare.

Inoltre, vale sempre l'implicazione

$$\text{convergenza assoluta} \quad \Rightarrow \quad \text{convergenza (semplice)}.$$

Infatti, se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ è convergente, allora lo sono anche le serie $\sum_{n=0}^{\infty} |\operatorname{Re} z_n|$ e $\sum_{n=0}^{\infty} |\operatorname{Im} z_n|$. Dato che per serie reali la convergenza assoluta implica la convergenza semplice, la precedente affermazione implica che le serie reali di termini generici $\operatorname{Re} z_n$ e $\operatorname{Im} z_n$ sono semplicemente convergenti. Per concludere, basta osservare che

$$\operatorname{Re} s_n = \operatorname{Re} \sum_{k=0}^n z_k = \sum_{k=0}^n \operatorname{Re} z_k \quad \text{e} \quad \operatorname{Im} s_n = \operatorname{Im} \sum_{k=0}^n z_k = \sum_{k=0}^n \operatorname{Im} z_k,$$

e ricordare (4)...

Per serie convergenti, vale la seguente versione della disuguaglianza triangolare

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} z_n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |z_n|.$$

ESEMPIO 2.7. Utilizziamo la convergenza assoluta per dimostrare la convergenza di una serie complessa fondamentale:

$$(6) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad z \in \mathbb{C}.$$

Vi ricorda qualcosa? La convergenza di questa serie discende direttamente dalla convergenza della corrispondente serie nei reali. Infatti, studiamo la convergenza assoluta e consideriamo la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{z^n}{n!} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!}.$$

Questa serie è convergente (la sua somma è $e^{|z|}$), quindi la serie (6) è convergente assolutamente e, di conseguenza, semplicemente.

Funzioni complesse. Una funzione complessa di variabile complessa è:

$$f : I \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

dove I è il sottoinsieme di \mathbb{C} in cui è definita la funzione f .

Se, per $\zeta \in \mathbb{C}$, esiste $r > 0$ tale che l'intorno di ζ di raggio r , escluso il punto ζ stesso, è contenuto in I , allora si può dare senso alla nozione di limite di f per $z \rightarrow \zeta$ utilizzando la stessa definizione già data nel caso reale.

DEFINIZIONE 2.8. La funzione f tende ad $\ell \in \mathbb{C}$ per $z \rightarrow \zeta \in I$, e si scrive $\lim_{z \rightarrow \zeta} f(z) = \ell$, se

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 \quad \text{tale che} \quad |f(z) - \ell| < \varepsilon \quad \forall z \in I, \quad 0 < |z - \zeta| < \delta.$$

Se (come faremo sempre nel seguito) si suppone che per ogni $\zeta \in I$ esista $r > 0$ tale che l'intorno di ζ di raggio r sia interamente contenuto in I , in altre parole, se si suppone che ogni punto $\zeta \in I$ sia interno ad I , allora è possibile estendere la definizione di *continuità* al caso di funzioni complesse di variabile complessa.

DEFINIZIONE 2.9. La funzione f è continua in $\zeta \in I$ se $\lim_{z \rightarrow \zeta} f(z) = f(\zeta)$, cioè se

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 \quad \text{tale che} \quad |f(z) - f(\zeta)| < \varepsilon \quad \forall z \in I, \quad |z - \zeta| < \delta.$$

Né più né meno della definizione di continuità già vista nel caso reale, con l'unica accortezza che i moduli che compaiono qui sono moduli di numeri complessi.

Ad esempio, la funzione $f(z) = 2iz - 1$ è continua in ζ per ogni $\zeta \in \mathbb{C}$. Infatti

$$|f(z) - f(\zeta)| = |(2iz - 1) - (2i\zeta - 1)| = |2i||z - \zeta| = 2|z - \zeta|,$$

quindi $|f(z) - f(\zeta)| < \varepsilon$ per tutti valori z per cui $|z - \zeta| < \delta = \varepsilon/2$.

ESEMPIO 2.10. Consideriamo un altro esempio: $f(z) = \bar{z}$, cioè la funzione che associa ad un numero complesso $z = x + iy$, il suo complesso coniugato $x - iy$. Fissato $\zeta = \xi + i\eta$, se $|z - \zeta| \equiv \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} < \delta$,

$$\begin{aligned} |f(z) - f(\zeta)| &= |(x - iy) - (\xi - i\eta)| = |(x - \xi) - i(y - \eta)| \\ &= \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} < \delta. \end{aligned}$$

La condizione $|f(z) - f(\zeta)| < \varepsilon$ è soddisfatta per $\delta = \varepsilon$.

Quali funzioni complesse sono continue? Ragioniamo come già fatto in \mathbb{R} . Somma, prodotto di funzioni continue sono funzioni continue. Quindi, dal fatto che le costanti e la funzione z sono funzioni continue, possiamo dedurre che tutti i polinomi in \mathbb{C} sono funzioni continue. Analogamente per le funzioni razionali.

Infine è possibile definire la derivata di funzioni complesse (qui è fondamentale la possibilità di dividere per un numero complesso).

DEFINIZIONE 2.11. Una funzione f è derivabile in $\zeta \in I$ (o olomorfa in $\zeta \in I$) se esiste finito il limite

$$(7) \quad f'(\zeta) = \lim_{z \rightarrow \zeta} \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta}.$$

Ad esempio, per calcolare la derivata della funzione $f(z) = z^n$ ($n \in \mathbb{N}$), basta riscrivere il rapporto incrementale nella forma

$$\frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} = \frac{z^n - \zeta^n}{z - \zeta} = z^{n-1} + z^{n-2}\zeta + \dots + \zeta^{n-1},$$

e passare al limite per $z \rightarrow \zeta$, ottenendo

$$(z^n)' = nz^{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Anche in quest'ambito è vera l'implicazione:

$$\text{derivabilità} \quad \Rightarrow \quad \text{continuità}.$$

Perché? Basta ragionare come in \mathbb{R} :

$$\lim_{z \rightarrow \zeta} [f(z) - f(\zeta)] = \lim_{z \rightarrow \zeta} \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} \cdot (z - \zeta) = f'(\zeta) \cdot 0 = 0$$

Nel caso reale, a partire dall'operazione di derivazione abbiamo dedotto informazioni relative alla monotonia delle funzioni. E' possibile fare lo stesso nel caso delle funzioni

complesse? Assolutamente no! Dato che in \mathbb{C} non è definito l'ordinamento, non ha senso parlare di funzioni crescenti/decrescenti. Analogamente concetti come massimo, minimo, convessità e concavità sono privi di senso per funzioni $f : I \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

3. L'esponenziale complesso

Una funzione particolarmente importante è la funzione esponenziale. Dato che la serie considerata nell'Esempio 2.7 è convergente per ogni $z \in \mathbb{C}$, è più che ragionevole utilizzarla per definire la funzione esponenziale anche nei complessi:

$$(8) \quad e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad z \in \mathbb{C}.$$

Come si può immaginare/sperare, anche per (8), vale la proprietà

$$(9) \quad e^{w+z} = e^w e^z \quad \forall w, z \in \mathbb{C}.$$

La dimostrazione si basa sull'uso dei prodotti di serie. Niente dettagli in questa sede.

La funzione esponenziale è continua? È derivabile? L'uno e l'altro. Dimostriamo prima di tutto la continuità in 0. Dato che $e^0 = 1$, bisogna stimare $|e^z - 1|$:

$$|e^z - 1| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} \right| = \left| z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)!} \right| \leq |z| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{(n+1)!} \leq |z| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} = |z|e^{|z|},$$

quindi, dato che $e^{|z|} \leq e$ per $|z| \leq 1$,

$$|e^z - 1| \leq e|z| \quad \forall |z| \leq 1,$$

da cui si deduce la continuità in $\zeta = 0$. Se $\zeta \in \mathbb{C}$, allora

$$\lim_{z \rightarrow \zeta} e^z = \lim_{z \rightarrow \zeta} e^{\zeta+(z-\zeta)} = e^\zeta \lim_{z \rightarrow \zeta} e^{z-\zeta} = e^\zeta \lim_{h \rightarrow 0} e^h = e^\zeta,$$

quindi la funzione è continua in ζ .

Anche per la derivabilità, consideriamo prima $\zeta = 0$: si ha

$$\frac{e^z - 1}{z} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)!} = z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+2)!},$$

quindi, per $|z| \leq 1$,

$$\left| \frac{e^z - 1}{z} - 1 \right| \leq |z| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{(n+2)!} \leq |z| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} = |z|e^{|z|} \leq e|z|,$$

che mostra che la derivata di e^z in 0 è 1.

Per ζ qualsiasi,

$$\lim_{z \rightarrow \zeta} \frac{e^z - e^\zeta}{z - \zeta} = \lim_{z \rightarrow \zeta} \frac{e^{\zeta+(z-\zeta)} - e^\zeta}{z - \zeta} = e^\zeta \lim_{z \rightarrow \zeta} \frac{e^{z-\zeta} - 1}{z - \zeta} = e^\zeta \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^\zeta.$$

Quindi

$$(e^z)' = e^z \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Fissato $\lambda \in \mathbb{C}$, per la funzione $f(z) = e^{\lambda z}$, vale

$$\frac{d(e^{\lambda z})}{dz} = e^{\lambda z} \frac{d(\lambda z)}{dz} = \lambda e^{\lambda z}.$$

Per derivare la funzione f , basta moltiplicare per λ la funzione stessa: in altri termini, $f(z) = e^{\lambda z}$ verifica l'equazione (differenziale) $f' = \lambda f$. Lo stesso è vero per le funzioni $A e^{\lambda z}$ con $A \in \mathbb{C}$.

Quale equazione è soddisfatta dalla derivata seconda di $f(z) = A e^{\lambda z}$? Facile:

$$f''(z) = \frac{d(A \lambda e^{\lambda z})}{dz} = A \lambda \frac{d(e^{\lambda z})}{dz} = A \lambda^2 e^{\lambda z} = \lambda^2 f,$$

quindi $f'' - \lambda^2 f = 0$.

Il fatto che le funzioni del tipo $A e^{\lambda z}$ soddisfino le semplicissime equazioni $f' - \lambda f = 0$ e $f'' - \lambda^2 f = 0$ fa di questa classe il mattone fondamentale per la costruzione delle soluzioni di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti, come vedremo tra un paio di fogli.

Formula di Eulero. Prima di concludere, deduciamo una formula estremamente interessante. Se calcoliamo l'esponenziale e^z in $z = ix \in i\mathbb{R}$, otteniamo

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n x^n}{n!}.$$

Dato che

$$i^0 = i^4 = \dots = 1, \quad i^1 = i^5 = \dots = i, \quad i^2 = i^6 = \dots = -1, \quad i^3 = i^7 = \dots = -i,$$

possiamo scrivere

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Dalle formule di Taylor per le funzioni $\cos x$ e $\sin x$, segue la formula di Eulero:

$$(10) \quad e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Chi è dunque l'esponenziale del numero complesso $z = x + iy$? Una sintesi opportuna di esponenziale reale e funzioni trigonometriche: applicando (10),

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y) = e^x \cos y + i e^x \sin y.$$

In particolare $\operatorname{Re} e^z = e^x \cos y$ e $\operatorname{Im} e^z = e^x \sin y$.

La formula di Eulero, interessante di per sé, è estremamente comoda per rappresentare i numeri complessi quando si usino le coordinate polari (ρ, θ) :

$$z = \rho (\cos \theta + i \sin \theta) = \rho e^{i\theta}$$

Le formule per il prodotto e le potenze diventano, facendo uso della rappresentazione esponenziale, conseguenze immediate di (9). Ad esempio,

$$z_1 \cdot z_2 = (\rho_1 e^{i\theta_1}) \cdot (\rho_2 e^{i\theta_2}) = \rho_1 \rho_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}.$$

Da (10) si deduce, in particolare, che l'esponenziale complesso non è una funzione iniettiva e quindi nemmeno invertibile. La definizione della funzione logaritmo nei numeri complessi richiede quindi una particolare attenzione. Qui non approfondiremo la questione. Anzi, non la toccheremo proprio.

CAPITOLO 2

Equazioni differenziali

Il problema più semplice che abbiamo affrontato e che rientra nella categoria delle equazioni differenziali è la determinazione di primitive

data $f(x)$ trovare tutte le funzioni $F(x)$ tali che $F'(x) = f(x)$.

In generale, un'equazione differenziale è un oggetto del tipo:

$$\mathcal{F}(x, y, y', y'', \dots) = 0,$$

cioè è una relazione che collega una funzione incognita y con la variabile indipendente x e con le derivate y', y'', \dots . Il caso della ricerca delle primitive corrisponde alla scelta $\mathcal{F} = y - F(x)$. Una funzione y , sufficientemente regolare, che verifica

$$\mathcal{F}(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots) = 0,$$

per ogni scelta della variabile x , è detta **soluzione** (o **integrale**) dell'equazione.

In quel che segue, ci limitiamo a considerare alcuni tipi specifici di equazioni differenziali: le equazioni lineari. Il significato, in quest'ambito, del vocabolo "lineare" sarà più chiaro tra qualche pagina.

1. Equazioni lineari del I ordine a coefficiente costante

Equazioni omogenee. Per iniziare, consideriamo un'equazione differenziale particolarmente semplice

$$(11) \quad y' + ay = 0 \quad a \in \mathbb{R}.$$

L'equazione (11) è *del primo ordine, lineare, a coefficiente costanti, omogenea*:

- del *primo ordine* perché nell'equazione compare solo la derivata prima;
- *lineare* perché la dipendenza da y, y' è lineare;
- a *coefficiente costante* perché il coefficienti di a è indipendente da t ;
- *omogenea*, perché la funzione $y = 0$ è una soluzione dell'equazione.

OSSERVAZIONE 1.1. *Il termine "lineare".* Supponiamo che y_1 e y_2 siano due soluzioni dell'equazione (11). Dati $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, consideriamo $w(t) := \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$, combinazione lineare di y_1 e y_2 . Allora:

$$w' + aw = \alpha y_1' + \beta y_2' + \alpha a y_1 + \beta a y_2 = \alpha(y_1' + a y_1) + \beta(y_2' + a y_2) = 0.$$

Quindi, dal fatto che l'equazione è lineare e omogenea discende la proprietà seguente: *ogni combinazione lineare di soluzioni di (11) è essa stessa una soluzione di (11)*.

Passiamo al problema di trovare tutte le soluzioni dell'equazione (11). Dato che tale equazione è risolta da tutte le funzioni della forma Ae^{-at} con $A \in \mathbb{R}$, poniamo $y(t) = A(t)e^{-at}$ e cerchiamo tutte le funzioni A per cui y è soluzioni. Dato che $y' = (A' - aA)e^{-at}$, l'equazione (11) equivale a

$$(A' - aA)e^{-at} + aAe^{-at} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad A' = 0.$$

Dato che la derivata di A è identicamente nulla, A è costante. Ricapitolando:

$$y'(t) + ay(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \Longleftrightarrow \quad y = Ae^{-at} \quad \text{per qualche } A \in \mathbb{R}.$$

Se la soluzione cercata deve soddisfare, oltre all'equazione differenziale (11), la condizione iniziale $y(t_0) = y_0$ per t_0, y_0 assegnati, si parla di **problema di Cauchy** per (11):

$$(12) \quad \text{trovare } y = y(t) \text{ tale che } \begin{cases} y' + ay = 0, \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Determinare la soluzione è più che facile: dato che conosciamo tutte le soluzioni dell'equazione differenziale, basta determinare quali di queste verificano il vincolo imposto dalla *condizione iniziale* $y(t_0) = y_0$. Se $y(t) = Ae^{-at}$, sostituendo

$$y_0 = y(t_0) = Ae^{-at_0} \quad \Rightarrow \quad A = y(t_0)e^{at_0} = y_0e^{at_0},$$

quindi c'è un'unica soluzione per il problema di Cauchy (12) ed è $y(t) = y_0e^{-a(t-t_0)}$.

Equazioni non omogenee. Data una funzione f integrabile, consideriamo

$$(13) \quad y' + ay = f(t) \quad a \in \mathbb{R}, \quad f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

L'equazione (13) è *del primo ordine, lineare, a coefficienti costanti, non omogenea*. La presenza del termine noto $f = f(t)$ fa in modo che $y = 0$ non sia soluzione (tranne nel caso $f \equiv 0$). Per cercare le soluzioni di questa equazione utilizziamo il metodo di *variazione delle costanti*: cerchiamo soluzioni della forma

$$y(t) = A(t)e^{-at}$$

dove $A = A(t)$ è una funzione da determinare. Dato che $y' = (A' - aA)e^{-at}$, sostituendo nell'equazione differenziale:

$$f = y' + ay = (A' - aA)e^{-at} + aAe^{-at} = A'e^{-at} \quad \Longleftrightarrow \quad A'(t) = f(t)e^{at}.$$

Se la funzione f è integrabile in ogni intervallo di \mathbb{R} , la funzione A è:

$$A(t) = \int_0^t f(s)e^{as} ds + C \quad C \in \mathbb{R}$$

e quindi anche la funzione y è determinata:

$$y(t) = A(t)e^{-at} = Ce^{-at} + \int_0^t f(s)e^{a(s-t)} ds \quad C \in \mathbb{R}.$$

La soluzione dell'equazione non omogenea è quindi della forma

$$y(t) = y_0(t) + \bar{y}(t) \quad \text{dove} \quad \begin{cases} y_0(t) = Ce^{-at} & \text{soluzione generale di (11)} \\ \bar{y}(t) = \int_0^t f(s)e^{a(s-t)} ds & \text{soluzione particolare di (13)}. \end{cases}$$

L'aver scelto in \bar{y} come primo estremo di integrazione $s = 0$ è del tutto arbitrario, un qualsiasi altro numero fissato sarebbe andato altrettanto bene. Ad esempio, per trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$(14) \quad \text{trovare } y = y(t) \text{ tale che} \quad \begin{cases} y' + ay = f(t), \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

è più comodo scegliere come primo estremo di integrazione t_0

$$y(t) = Ce^{-at} + \int_{t_0}^t f(s)e^{a(s-t)} ds \quad C \in \mathbb{R},$$

di modo che

$$y_0 = y(t_0) = Ce^{-at_0} + \int_{t_0}^{t_0} f(s)e^{a(s-t_0)} ds = Ce^{-at_0} \quad \Rightarrow \quad C = y_0 e^{at_0},$$

e la soluzione richiesta è

$$y(t) = y_0 e^{-a(t-t_0)} + \int_{t_0}^t f(s)e^{a(s-t)} ds.$$

Sistemi disaccoppiati di equazioni lineari. Il caso di un'unica funzione incognita è evidentemente il caso più semplice. In generale, è utile considerare situazioni in cui sono presenti più funzioni incognite: y_1, y_2, \dots . Risolvere sistemi nel caso generale è complicato e non è questa la sede in cui affrontare la questioni. Esiste però una situazione facile in cui possibile ricondursi al caso studiato in precedenza: assegnate le costanti a, b, c , cerchiamo le soluzioni y_1, y_2 del sistema

$$\begin{cases} y_1' + ay_1 = 0, \\ y_2' + by_1 + cy_2 = 0. \end{cases}$$

La peculiarità di questo sistema è che la prima equazione $y_1' + ay_1 = 0$ è disaccoppiata dalla seconda, cioè è una equazione per la sola incognita y_1 (y_2 non compare). Qui si può risolvere la prima equazione e, successivamente, risolvere la seconda dopo aver inserito l'espressione esplicita per y_1 . Procediamo

$$y_1' + ay_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_1 = Ae^{-at} \quad A \in \mathbb{R},$$

quindi l'equazione per y_2 diviene $y_2' + cy_2 = -Abe^{-at}$, cioè un'equazione non omogenea. Perciò, se $c \neq a$,

$$y_2(t) = Be^{-ct} - Ab \int_0^t e^{-as+c(s-t)} ds = Be^{-at} + \frac{Ab}{c-a} (e^{-at} - e^{-ct}) \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Invece, se $c = a$,

$$y_2(t) = Be^{-at} - Ab \int_0^t e^{-at} ds = (B - Abt) e^{-at} \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Si faccia attenzione alle costanti in gioco: a, b, c sono dati del problema, mentre A, B sono costanti arbitrarie (ogni scelta di A, B corrisponde ad una soluzione).

Equazioni lineari del I ordine a coefficiente variabile. Torniamo, ora, al caso di una singola equazione differenziale, e consideriamo il caso

$$(15) \quad y' + a(t)y = b(t) \quad t \in \mathbb{R},$$

dove a e b sono funzioni reali continue e la funzione incognita $y = y(x)$ è anch'essa una funzione reale. L'equazione differenziale (15) si dice *equazione differenziale lineare del primo ordine a coefficiente variabile*.

Come sempre, il problema di Cauchy consiste nel trovare la soluzione di

$$(16) \quad y' + a(t)y = b(t) \quad y(t_0) = y_0,$$

dove t_0 e y_0 sono assegnati.

Ecco come procedere per determinare l'integrale generale di (15). Indicata con A una primitiva della funzione a , moltiplichiamo l'equazione per la funzione $e^{A(t)}$, ottenendo

$$e^{A(t)} y'(t) + e^{A(t)} a(t)y(t) = e^{A(t)} b(t).$$

Il termine a primo membro è la derivata della funzione $e^{A(t)}y(t)$, infatti

$$(e^{A(t)}y(t))' = e^{A(t)}y'(t) + (e^{A(t)})'y(t) = e^{A(t)}y'(t) + e^{A(t)}a(t)y(t).$$

Quindi l'equazione prende la forma

$$(e^{A(t)}y(t))' = e^{A(t)}b(t).$$

Calcoliamo l'integrale indefinito del secondo membro

$$\int e^{A(t)}b(t) dt = F(t) + C.$$

Dato che la derivata di $e^{A(t)}y(t)$ è la funzione $e^{A(t)}b(t)$, deve valere

$$e^{A(t)}y(t) = F(t) + C.$$

Esplicitando rispetto a y , otteniamo la soluzione generale di (15):

$$(17) \quad y(t) = (F(t) + C)e^{-A(t)} \quad \text{dove} \quad \begin{cases} A'(t) = a(t), \\ F'(t) = e^{A(t)} b(t), \\ C \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

ESERCIZIO 1.2. Risolvere l'equazione differenziale $y' + y \cos t = \frac{1}{2} \sin(2t)$.

Nel caso in cui si debba risolvere un problema di Cauchy, quindi se è assegnata anche la condizione iniziale $y(t_0) = y_0$, basta imporre che la generica soluzione data da (17) soddisfi la condizione data.

Una strada alternativa, che utilizza l'uso di integrali definiti (anziché indefiniti), segue lo stesso schema visto in precedenza:

– si calcola A , primitiva di a , e si moltiplica l'equazione per $e^{A(t)}$ in modo da ottenere

$$(y e^{A(t)})' = b(t) e^{A(t)}.$$

– si integra in (t_0, t) e, per il teorema fondamentale del calcolo integrale,

$$y(t) e^{A(t)} - y(t_0) e^{A(t_0)} = \int_{t_0}^t b(\tau) e^{A(\tau)} d\tau,$$

– si usa la condizione $y(t_0) = y_0$ e si esplicita $y(t)$,

$$y(t) = y_0 e^{A(t_0)-A(t)} + e^{-A(t)} \int_{t_0}^t b(\tau) e^{A(\tau)} d\tau,$$

Se $A(t)$ è scelta come $\int_{t_0}^t a(s) ds$, la formula può essere riscritta come

$$y(t) = y_0 \exp\left(-\int_{t_0}^t a(s) ds\right) + \int_{t_0}^t b(\tau) \exp\left(-\int_{\tau}^t a(s) ds\right) d\tau.$$

ESERCIZIO 1.3. Risolvere il problema di Cauchy

$$ty' - y + t \ln t = 0 \quad y(1) = 1.$$

2. Equazioni lineari del II ordine a coefficienti costanti omogenee

Consideriamo una particella, cioè un punto in cui supponiamo concentrata la massa m , e supponiamo che si muova lungo una retta. La posizione della particella al tempo t è individuata da una funzione $y = y(t)$, che ne rappresenta la coordinata rispetto ad un sistema di riferimento fissato. La funzione $y'(t)$ è la *velocità* della particella, mentre $y''(t)$ ne è l'*accelerazione*.

In meccanica, il moto della particella è causato dalla presenza di forze, descritte qui da una funzione F , che agiscono sulla particella stessa. La *legge di Newton* afferma

che: *la massa m moltiplicata per l'accelerazione è uguale alla forza risultante che agisce sulla particella:*

$$(18) \quad my'' = F.$$

Modellizzare l'azione di una certa forza F sulla particella corrisponde ad esprimere F in termini della posizione y , della velocità y' , dell'istante t . Di conseguenza, la legge di Newton prende la forma di una equazione differenziale

$$(19) \quad my'' = F(t, y, y').$$

Ad esempio, consideriamo una particella che si sposti lungo l'asse y , su cui agisca una forza elastica F_e , diretta verso l'origine e proporzionale alla distanza dall'origine. In altre parole, supponiamo $F_e = -ky$ con $k > 0$ (k è il coefficiente di proporzionalità e misura la grandezza delle forza elastica). La legge di Newton dice che il moto della particella è descritto dall'equazione

$$(20) \quad my'' = -ky \quad (\text{equazione dell'oscillatore armonico})$$

Se sulla particella agisce anche la forza d'attrito F_a , che supponiamo proporzionale alla velocità y' , ma diretta in senso contrario, cioè $F_a = -ry'$ con $r \geq 0$, otteniamo l'equazione

$$(21) \quad my'' = -ky - ry' \quad (\text{equazione dell'oscillatore con attrito}).$$

Questo è l'esempio tipo di equazione di cui vogliamo determinare le soluzioni.

Studiamo, perciò, l'equazione differenziale *del secondo ordine, lineare, a coefficienti costanti, omogenea*:

$$(22) \quad y'' + 2by' + cy = 0 \quad b, c \in \mathbb{R}.$$

L'equazione è:

- del *secondo ordine* perché compaiono derivate fino al secondo ordine;
- *lineare* perché la dipendenza da y , y' e y'' è lineare;
- a *coefficienti costanti* perché i coefficienti di b e c non dipendono dalla variabile t ;
- *omogenea*, perché la funzione $y = 0$ è una soluzione dell'equazione.

Un esempio di equazione di questo genere è $y'' + y = 0$. Per ogni $A, B \in \mathbb{R}$, la funzione $y = A \cos t + B \sin t$ ne è soluzione (verificatelo!). Questo fatto è generale: date y_1 e y_2 soluzioni di (22), *tutte le combinazioni lineari di y_1 e y_2 sono soluzioni della stessa equazione.*

DEFINIZIONE 2.1. *Due funzioni y_1 e y_2 sono linearmente dipendenti se una è proporzionale all'altra, cioè se esistono due costanti α, β , non entrambe nulle, tali che $\alpha y_1(t) +$*

$\beta y_2(t) = 0$ per ogni t . Si dicono **linearmente indipendenti** se non sono *linearmente dipendenti*.

ESEMPIO 2.2. Ad esempio, $y_1 = \sin t$ e $y_2 = \cos t$ sono soluzioni linearmente indipendenti di $y'' + y = 0$. Infatti, se, per qualche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, si ha $\alpha \sin t + \beta \cos t = 0$ per ogni t , allora

$$\begin{aligned} t = 0 & \Rightarrow \alpha \sin 0 + \beta \cos 0 = \beta = 0, \\ t = \frac{\pi}{2} & \Rightarrow \alpha \sin \frac{\pi}{2} + \beta \cos \frac{\pi}{2} = \alpha = 0. \end{aligned}$$

Quindi $\alpha = \beta = 0$.

Il risultato che segue (di cui omettiamo la dimostrazione) descrive la struttura dell'insieme delle soluzioni di (22).

TEOREMA 2.3. *Se y_1 e y_2 sono soluzioni linearmente indipendenti di (22), tutte le soluzioni di (22) sono della forma*

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Quindi, per conoscere tutte le soluzioni dell'equazione differenziale lineare (22) basta individuare una coppia di soluzioni linearmente indipendenti. Tutte le altre soluzioni si ottengono per combinazione lineare. Ad esempio, dato che $\sin t$ e $\cos t$ sono linearmente indipendenti, tutte le soluzioni di $y'' + y = 0$ sono del tipo $A \sin t + B \cos t$ con $A, B \in \mathbb{R}$.

Costruzione delle soluzioni linearmente indipendenti. L'obiettivo ora è determinare una coppia di soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione (22). A questo scopo procediamo in una maniera che può sembrare strana, ma molto efficace:

- consideriamo la stessa equazione differenziale per funzioni a valori complessi, cioè cerchiamo $z = z(t) \in \mathbb{C}$ tali che $z'' + 2bz' + cz = 0$;
- determiniamo due soluzioni complesse z_1 e z_2 opportune;
- scegliamo $y_1 = \operatorname{Re} z_1$ e $y_2 = \operatorname{Re} z_2$.

Consideriamo quindi l'equazione

$$(23) \quad z'' + 2bz' + cz = 0 \quad b, c \in \mathbb{R},$$

dove $z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ e cerchiamo una soluzione della forma $z = e^{\lambda t}$ dove $\lambda \in \mathbb{C}$ è da determinare. Dato che $z' = \lambda e^{\lambda t}$ e $z'' = \lambda^2 e^{\lambda t}$, λ deve essere tale che

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + 2b\lambda e^{\lambda t} + c e^{\lambda t} = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Dato che $e^{\lambda t} \neq 0$, λ deve essere soluzione dell'equazione di secondo grado complessa

$$(24) \quad \text{polinomio caratteristico:} \quad \lambda^2 + 2b\lambda + c = 0.$$

Studiamo tre casi a seconda del tipo di radici del polinomio caratteristico.

Caso I. $b^2 > c$. Il polinomio caratteristico (24) ha due radici reali

$$\lambda_1 = -b + \sqrt{b^2 - c}, \quad \lambda_2 = -b - \sqrt{b^2 - c}.$$

Otteniamo in corrispondenza due soluzioni

$$z_1(t) = e^{\lambda_1 t} \quad z_2(t) = e^{\lambda_2 t}.$$

Prendendo la parte reale otteniamo le soluzioni y_1 e y_2 cercate, ma... z_1 e z_2 sono funzioni a valori reali! Quindi in realtà y_1 e y_2 coincidono con z_1 e z_2 , rispettivamente:

$$y_1(t) = \operatorname{Re} z_1(t) = e^{\lambda_1 t} \quad y_2(t) = \operatorname{Re} z_2(t) = e^{\lambda_2 t}.$$

Per verificare che y_1, y_2 sono indipendenti, supponiamo che esistano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che

$$\alpha e^{\lambda_1 t} + \beta e^{\lambda_2 t} = 0.$$

Derivando e calcolando entrambe le relazioni per $t = 0$, si ottiene un sistema lineare omogeneo per le incognite α, β

$$\alpha + \beta = 0, \quad \alpha \lambda_1 + \beta \lambda_2 = 0.$$

Dato che il determinante di questo sistema è $\lambda_2 - \lambda_1 = -2\sqrt{b^2 - c} < 0$, l'unica soluzione è $\alpha = \beta = 0$.

In conclusione, nel caso $b^2 > c$, tutte le soluzioni di (22) sono della forma

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}.$$

ESERCIZIO 2.4. *Determinare le soluzioni dell'equazione $y'' - 3y' + 2y = 0$.*

Caso II. $b^2 = c$. In questo caso il polinomio caratteristico è il quadrato di un binomio

$$\lambda^2 + 2b\lambda + b^2 = (\lambda + b)^2,$$

ed ha un'unica soluzione $\lambda = -b$. In corrispondenza troviamo un'unica soluzione $z_1(t) = e^{-bt}$ dell'equazione differenziale. Per determinare una seconda soluzione (indipendente da z_1), consideriamo $z_2(t) = te^{-bt}$. Dato che

$$z_2'(t) = (1 - bt)e^{-bt} \quad z_2''(t) = (-2b + b^2 t)e^{-bt},$$

si ha

$$z_2''(t) + 2bz_2'(t) + b^2 z_2(t) = [(-2b + b^2 t) + 2b(1 - bt) + b^2 t]e^{-bt} = 0.$$

Quindi anche z_2 è soluzione dell'equazione.

OSSERVAZIONE 2.5. La scelta di z_2 è suggerita da un procedimento di limite, immaginando il caso di due radici coincidenti come limite di un caso con due radici distinte. Se $\lambda_1 \neq \lambda_2$, l'espressione $\frac{e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t}}{\lambda_2 - \lambda_1}$, è soluzione di (23). Per $\lambda_2 \rightarrow \lambda_1$ otteniamo

$$\lim_{\lambda_2 \rightarrow \lambda_1} \frac{e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t}}{\lambda_2 - \lambda_1} = \lim_{\lambda_2 \rightarrow \lambda_1} \frac{e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t}}{\lambda_2 t - \lambda_1 t} \cdot t = te^{\lambda_1 t},$$

che è la soluzione determinata in precedenza.

Come nel caso precedente, le due soluzioni complesse $z_1(t) = e^{-bt}$ e $z_2(t) = te^{-bt}$ sono a valori reali. Inoltre si tratta di soluzioni indipendenti. Infatti, siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che $\alpha e^{-bt} + \beta te^{-bt} = 0$, per ogni t . Dividendo per e^{-bt} , si deduce $\alpha + \beta t = 0$, cioè $\alpha = \beta = 0$.

In conclusione, tutte le soluzioni di (22) nel caso $b^2 = c$, sono del tipo

$$y(t) = c_1 e^{-bt} + c_2 t e^{-bt} = (c_1 + c_2 t) e^{-bt} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

ESERCIZIO 2.6. *Determinare tutte le soluzioni dell'equazione $y'' + 4y' + 4y = 0$.*

Caso III. $b^2 < c$. Qui, finalmente!, è necessario l'uso dei complessi. Se $b^2 < c$, il polinomio caratteristico $\lambda^2 + 2b\lambda + c$ ha due radici complesse coniugate

$$\lambda^2 + 2b\lambda + c = 0 \quad \iff \quad \lambda \in \{\lambda_1, \lambda_2\} \quad \text{dove} \quad \begin{cases} \lambda_1 = -b + i\sqrt{c - b^2} \\ \lambda_2 = -b - i\sqrt{c - b^2} \end{cases}$$

Nel seguito, indichiamo con $\nu = \sqrt{c - b^2} > 0$. L'equazione differenziale complessa (23) ha due soluzioni indipendenti date da

$$\begin{aligned} z_1(t) &= e^{\lambda_1 t} = e^{-bt} \left\{ \cos(\nu t) + i \sin(\nu t) \right\}, \\ z_2(t) &= e^{\lambda_2 t} = e^{-bt} \left\{ \cos(\nu t) - i \sin(\nu t) \right\} \end{aligned}$$

La parte reale di queste due (distinte) soluzioni è però la stessa: $e^{-bt} \cos(\nu t)$. Occorre quindi sostituire la soluzione z_2 con un'altra soluzione \tilde{z}_2 diversa. Dato che $e^{\lambda_1 t}$ è soluzione di (23), anche tutte le funzioni della forma $Ae^{\lambda_1 t}$ sono soluzioni della stessa equazione per ogni scelta di $A \in \mathbb{C}$. Scegliamo $A = -i$, ossia poniamo $\tilde{z}_2(t) = -i e^{\lambda_1 t} = -i z_1(t)$, e scegliamo come soluzioni dell'equazione (23) le funzioni

$$z_1(t) = e^{-bt} \left\{ \cos(\nu t) + i \sin(\nu t) \right\}, \quad \tilde{z}_2(t) = e^{-bt} \left\{ \sin(\nu t) - i \cos(\nu t) \right\}.$$

Le soluzioni linearmente indipendenti di (22) sono date dalle parti reali di z_1 e \tilde{z}_2 :

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \operatorname{Re} z_1(t) = e^{-bt} \cos(\nu t), \\ y_2(t) &= \operatorname{Re} \tilde{z}_2(t) = e^{-bt} \sin(\nu t). \end{aligned}$$

Quindi, nel caso $b^2 < c$, tutte le soluzioni di (22) sono della forma

$$y(t) = e^{-bt} \left(c_1 \cos(\nu t) + c_2 \sin(\nu t) \right) \quad \nu := \sqrt{c - b^2}.$$

Dato che $-b = \operatorname{Re} \lambda_1$ e $\nu = \operatorname{Im} \lambda_1$, se preferite la le soluzioni si possono scrivere così:

$$y(t) = e^{(\operatorname{Re} \lambda) t} \left(c_1 \cos[(\operatorname{Im} \lambda) t] + c_2 \sin[(\operatorname{Im} \lambda) t] \right) \quad \text{con } \lambda \text{ tale che } \lambda^2 + 2b\lambda + c = 0$$

ESERCIZIO 2.7. *Dimostrare che, se $\nu \neq 0$, le funzioni $e^{-bt} \cos(\nu t)$ e $e^{-bt} \sin(\nu t)$ sono linearmente indipendenti.*

ESERCIZIO 2.8. *Determinare tutte le soluzioni di $y'' + y' + y = 0$.*

Analizziamo le soluzioni nel caso $b, c \geq 0$. Nel modello di oscillatore con attrito, b e c sono positivi dato che rappresentano

$$b = \frac{r}{2m} \quad c = \frac{k}{m},$$

dove m è la massa, r misura l'attrito e k misura la forza elastica.

Nei Casi I e II, in cui $b^2 \geq c$, ossia $r^2 \geq 4km$ la soluzione è data o dalla sovrapposizione di due funzioni esponenziali

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \quad \text{con} \quad \begin{cases} \lambda_1 = -b + \sqrt{b^2 - c} < 0, \\ \lambda_2 = -b - \sqrt{b^2 - c} < 0. \end{cases}$$

oppure dal prodotto di una funzione lineare con un'esponenziale

$$y(t) = (c_1 + c_2 t) e^{-bt}.$$

In entrambi i casi, la soluzione tende asintoticamente a zero per $t \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0.$$

Fisicamente questo corrisponde al fatto che l'effetto di attrito è talmente forte da impedire alla forza elastica di generare un moto oscillatorio.

Al contrario, nel Caso III, $b^2 < c$, cioè per $r^2 < 4km$, le soluzioni sono

$$y(t) = e^{-bt} (c_1 \cos(\nu t) + c_2 \sin(\nu t)) \quad \nu = \sqrt{c - b^2}.$$

Se $b > 0$ (presenza di attrito), le soluzioni sono il prodotto di un termine oscillatorio e di un termine esponenziale che regola l'ampiezza delle oscillazioni e che tende a 0 per $t \rightarrow +\infty$. In questo caso si parla di *oscillazioni armoniche smorzate*. Il valore $\nu = \sqrt{c - b^2}$ è la *frequenza* delle oscillazioni.

Nel caso in cui $b = 0$ (assenza di attrito), le soluzioni sono date da una combinazione lineare di $\sin(\sqrt{c}t)$ e $\cos(\sqrt{c}t)$, e quindi danno luogo a oscillazioni periodiche *non smorzate*.

Problema di Cauchy. Per individuare un'unica soluzione occorre fissare le *costanti di integrazione* c_1 e c_2 . Questo fatto è sensato rispetto al problema fisico: l'evoluzione del moto dipende dalle *condizioni iniziali*, cioè da posizione e velocità ad un istante t_0 . Il problema di Cauchy per l'equazione (22) è il problema di determinare la soluzione di

$$(25) \quad \begin{cases} y'' + 2by' + cy = 0, \\ y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_1. \end{cases}$$

dove $t_0, y_0, y_1 \in \mathbb{R}$ sono costanti assegnate. Il problema è quindi di trovare, tra tutte le soluzioni dell'equazione $y'' + 2by' + cy = 0$, l'unica che soddisfi le condizioni iniziali $y(t_0) = y_0$ e $y'(t_0) = y_1$.

ESEMPIO 2.9. Cerchiamo la soluzione del problema di Cauchy

$$y'' + y = 0 \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

Dato che le soluzioni di $y'' + y = 0$ sono tutte e sole combinazioni lineari di $\sin t$ e $\cos t$, consideriamo una generica soluzione e imponiamo che soddisfi le condizioni iniziali. In questo modo otteniamo un sistema lineare per le costanti c_1, c_2 :

$$y(x) = c_1 \cos t + c_2 \sin t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1,$$

implica

$$\begin{cases} 1 \cdot c_1 + 0 \cdot c_2 = 1 \\ 0 \cdot c_1 + 1 \cdot c_2 = 1. \end{cases}$$

Quindi $c_1 = c_2 = 1$ e l'unica soluzione del problema è $y(t) = \cos t + \sin t$.

In generale, se si sono determinate due soluzioni linearmente indipendenti y_1 e y_2 di (22), è sempre possibile risolvere il problema di Cauchy imponendo le condizioni iniziali date in (25): sia

$$y(x) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t), \quad y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_1,$$

allora

$$\begin{cases} y_1(0) c_1 + y_2(0) c_2 = y_0 \\ y_1'(0) c_1 + y_2'(0) c_2 = y_1. \end{cases}$$

Il fatto che le soluzioni siano linearmente indipendenti garantisce che il determinante del sistema sia sempre non nullo e che il sistema ammetta un'unica soluzione.

ESECIZIO 2.10. Determinare le soluzioni dei seguenti problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - y' - 2y = 0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = -2, \end{cases} \quad \begin{cases} y'' + y' - 6y = 0 \\ y(0) = -1, \quad y'(0) = 3, \end{cases}$$

3. Equazioni lineari del II ordine a coefficienti costanti non omogenee

Torniamo all'esempio dell'oscillatore con attrito. Se supponiamo che sulla particella agisca anche una forza esterna f che sia funzione solo del tempo, cioè $f = f(t)$, l'equazione del moto diviene $my'' + ry' + ky = f(t)$. Nel caso in cui la funzione f sia nulla, si parla di *moto libero*, se invece $f \neq 0$, si parla di *moto forzato*.

Prendiamo il toro per le corna e consideriamo l'equazione

$$(26) \quad y'' + 2by' + cy = f(t) \quad b, c \in \mathbb{R},$$

dove f è una funzione assegnata. L'equazione differenziale (26) è del secondo ordine, lineare, a coefficienti costanti, *non omogenea*.

Se w e v sono due soluzioni, allora la funzione differenza $u := w - v$ soddisfa l'equazione omogenea (22), come si può verificare con una semplice sostituzione. Viceversa, se u è una soluzione dell'equazione omogenea (22) e v dell'equazione non omogenea (26), la somma $w := u + v$ è soluzione dell'equazione (26). Quindi *la soluzione generale dell'equazione non omogenea (26) è*

$$y(t) = y_0(t) + \bar{y}(t) \quad \text{dove} \quad \begin{cases} y_0 & \text{soluzione generale di (22)} \\ \bar{y} & \text{soluzione particolare di (26)}. \end{cases}$$

Dato che abbiamo già una strategia generale per trovare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea (22), per risolvere il problema nel caso non omogeneo, basta trovare una *singola* soluzione di (26).

Principio di sovrapposizione. Supponiamo di decomporre la funzione f come somma di due funzioni f_1 e f_2 , cioè supponiamo che sia

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t).$$

Se y_1 è una soluzione di $y'' + 2by' + cy = f_1(t)$ e y_2 è una soluzione di $y'' + 2by' + cy = f_2(t)$, allora la funzione somma $y(t) := y_1(t) + y_2(t)$ è soluzione di (26). Questo fatto è noto come **principio di sovrapposizione**. Sostanzialmente significa che se abbiamo una forza “complicata” che, però, può essere decomposta come somma di singole parti “elementari”, possiamo ottenere l'evoluzione del fenomeno completo sommando le evoluzioni relative ad ogni singola parte. In termini matematici possiamo dire che la soluzione generale di

$$y'' + 2by' + cy = f_1(t) + \cdots + f_n(t)$$

è data da

$$y(t) = y_0(t) + \bar{y}_1(t) + \cdots + \bar{y}_n(t)$$

dove

y_0 soluzione generale di $y'' + 2by' + cy = 0$

\bar{y}_i soluzione particolare di $y'' + 2by' + cy = f_i(t)$.

L'obiettivo è quindi quello di determinare una soluzione particolare di (26) nel caso di f particolarmente semplici e poi determinare la soluzione particolare per funzioni più complicate che si decompongano come somma di funzioni "semplici".

Forzanti periodiche. $f(t) = Ce^{i\omega t}$ Il caso più importante è quello di forzante periodica, cioè del tipo

$$C \cos(\omega t) \quad \text{o} \quad C \sin(\omega t) \quad (C, \omega \in \mathbb{R}).$$

Invece di lavorare con queste funzioni trigonometriche, è estremamente più semplice ed elegante lavorare nell'ambito complesso. Poniamo $f(t) = Ce^{i\omega t}$ e studiamo

$$(27) \quad z'' + 2bz' + cz = Ce^{i\omega t} \quad C, \omega \in \mathbb{R},$$

in cui l'incognita è la funzione $z = z(t)$ a valori in \mathbb{C} . Prima di risolvere questa equazione, poniamoci il problema del "ritorno": *una volta trovata una soluzione z a valori complessi, come determiniamo la soluzione reale y che cerchiamo?* Indichiamo la funzione z , soluzione di (27), nella forma

$$z(t) = y_1(t) + iy_2(t),$$

dove $y_1 = \operatorname{Re} z$ e $y_2 = \operatorname{Im} z$. Inserendo in (27), abbiamo

$$y_1'' + 2by_1' + cy_1 + i(y_2'' + 2by_2' + cy_2) = C \cos(\omega t) + iC \sin(\omega t).$$

Quindi, uguagliando la parte reale e la parte immaginaria,

$$\begin{aligned} y_1'' + 2by_1' + cy_1 &= C \cos(\omega t) \\ y_2'' + 2by_2' + cy_2 &= C \sin(\omega t), \end{aligned}$$

cioè y_1 , parte reale di z , verifica l'equazione con termine forzante $C \cos(\omega t)$ e y_2 , parte immaginaria di z , con termine forzante $C \sin(\omega t)$. A seconda della funzione f che stiamo considerando, sceglieremo la parte reale o la parte immaginaria della soluzione complessa.

Con la tranquillità di poter tornare nell'ambito reale, riprendiamo lo studio dell'equazione (27) con l'obiettivo di trovarne una soluzione particolare. È sensato immaginare che esista una soluzione con la stessa frequenza di oscillazione di f :

$$z(t) = \sigma e^{i\omega t} \quad \sigma \in \mathbb{C}.$$

Il numero complesso σ è da determinare imponendo la condizione che z sia soluzione dell'equazione cercata.

ESEMPIO 3.1. Partiamo da un problema specifico: trovare una soluzione di

$$y'' - y = \cos t.$$

Dato che $\cos t = \operatorname{Re} e^{it}$, cerchiamo $\sigma \in \mathbb{C}$ tale che $z(t) = \sigma e^{it}$ sia soluzione di $z'' - z = e^{it}$. Dato che $z'' = -\sigma e^{it}$, sostituendo, otteniamo $(-\sigma - \sigma)e^{it} = e^{it}$ da cui $\sigma = -\frac{1}{2}$. Quindi la soluzione complessa z è $-\frac{1}{2}e^{it}$. La soluzione particolare \bar{y} dell'equazione richiesta è data dalla parte reale di z , cioè

$$\bar{y}(t) = \operatorname{Re} z(t) = -\frac{1}{2} \cos t.$$

Nel caso generale, dato che $z'(t) = i\omega\sigma e^{i\omega t}$ e $z''(t) = -\omega^2\sigma e^{i\omega t}$, sostituendo ed eliminando il termine $e^{i\omega t}$, otteniamo

$$-\omega^2\sigma + 2bi\omega\sigma + c\sigma = C \quad \Rightarrow \quad (-\omega^2 + 2bi\omega + c)\sigma = C.$$

Quindi, se $c - \omega^2 + 2bi\omega \neq 0$,

$$\sigma = \frac{C}{c - \omega^2 + 2bi\omega} = C \frac{c - \omega^2 - 2bi\omega}{(c - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2}.$$

Questo valore di σ può essere riscritto nella forma esponenziale

$$\sigma = C\alpha e^{-i\omega\delta} \quad \text{dove} \quad \begin{cases} \alpha = \frac{|\sigma|}{C} = \frac{1}{C \sqrt{(c - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2}} \\ \cos(\omega\delta) = (c - \omega^2)\alpha, \quad \sin(\omega\delta) = 2b\omega\alpha \end{cases}$$

La soluzione complessa z è quindi

$$z(t) = C\alpha e^{i\omega(t-\delta)}.$$

di cui scegliere la parte reale o la parte immaginaria a seconda della funzione f data.

ESERCIZIO 3.2. Determinare una soluzione particolare di $y'' + 2y' + 2y = 2 \sin(2t)$.

Soluzione. Sostituendo $z(t) = \sigma e^{2it}$ in $z'' + 2z' + 2z = 2e^{2it}$, segue $-4\sigma + 4i\sigma + 2\sigma = 2$ da cui $\sigma = \frac{1}{2i-1} = -\frac{1+2i}{5}$. Quindi

$$z(t) = -\frac{1+2i}{5} [\cos(2t) + i \sin(2t)]$$

La soluzione particolare è data dalla parte immaginaria di z

$$y(t) = \operatorname{Im} z(t) = -\frac{1}{5} [2 \cos(2t) + \sin(2t)].$$

Attenzione! Il metodo appena esposto funziona se $c - \omega^2 + 2bi\omega \neq 0$. Rimane quindi da capire il caso in cui

$$c = \omega^2, \quad b\omega = 0.$$

Per cominciare, supponiamo $\omega \neq 0$. La seconda condizione implica $b = 0$ e quindi

$$z'' + cz = Ce^{i\omega t} \quad C, \omega \in \mathbb{R}.$$

Cercando soluzioni $z(t) = \sigma e^{i\omega t}$ con $\sigma \in \mathbb{C}$, otteniamo l'equazione $(c - \omega^2)\sigma = C$. Se $\omega^2 = c$ la relazione precedente dice che non esiste nessuna soluzione della forma $z(t) = \sigma e^{i\omega t}$! Non ci perdiamo d'animo e, in analogia con quanto visto per le equazioni omogenee, cerchiamo una soluzione della forma

$$z(t) = \sigma t e^{i\omega t} \quad \sigma \in \mathbb{C}.$$

Dato che $z'(t) = \sigma(1 + i\omega t)e^{i\omega t}$ e $z''(t) = \sigma(2i\omega - \omega^2 t)e^{i\omega t}$, sostituendo e semplificando il termine $e^{i\omega t}$,

$$2\sigma i\omega = C \quad \implies \quad \sigma = \frac{C}{2i\omega} = -C \frac{i}{2\omega}$$

avendo tenuto conto di $\omega^2 = c$.

ESERCIZIO 3.3. Determinare una soluzione particolare di $y'' + y = \sin t$.

Soluzione. Studiamo l'equazione complessa $z'' + z = e^{it}$ e cerchiamone soluzioni della forma $z(t) = \sigma t e^{it}$. Sostituendo nell'equazione $z'(t) = \sigma(1 + it)e^{it}$ e $z''(t) = \sigma(2i - t)e^{it}$,

$$\sigma(2i - t)e^{it} + \sigma t e^{it} = e^{it} \quad \implies \quad 2\sigma i = 1.$$

Quindi la soluzione complessa è

$$z(t) = -\frac{it}{2}e^{it} = -\frac{it}{2}(\cos t + i \sin t) = \frac{t}{2} \sin t - i \frac{t}{2} \cos t.$$

La soluzione desiderata è la parte immaginaria di z : $y(t) = \text{Im } z(t) = -\frac{1}{2}t \cos t$.

Resta escluso un solo caso: quello in cui $c - \omega^2 + 2bi\omega = 0$ e $\omega = 0$. Allora $c = 0$ e l'equazione diventa $y'' + 2by' = C$. Ecco le soluzioni cercate in questi casi

$$b \neq 0 : \quad \bar{y} = \frac{Ct}{2b} \quad \text{e} \quad b = 0 : \quad \bar{y} = \frac{Ct^2}{2}.$$

Verificate!

Risonanza. Se $c - \omega^2 + 2bi\omega \neq 0$, una soluzione particolare dell'equazione complessa è

$$z(t) = C\alpha e^{i\omega(t-\delta)} \quad \text{dove} \quad \begin{cases} \alpha = |\sigma| = \frac{1}{\sqrt{(c - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2}} \\ \cos(\omega\delta) = (c - \omega^2)\alpha, \quad \sin(\omega\delta) = 2b\omega\alpha \end{cases}$$

Il fattore α corrisponde ad un fattore di "distorsione" e il fattore $\omega\delta$ ad un fattore di "spostamento di fase" rispetto al segnale esterno originale $Ce^{i\omega t}$.

Il fattore α descrive quanto il "segnale esterno" $Ce^{i\omega t}$ viene amplificato dal sistema. Immaginiamo b, c fissati, e supponiamo di far variare la frequenza ω del segnale. Il grafico di

$$(28) \quad \phi(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(c - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2}}$$

è detto *curva di risonanza*.

Nel caso $b, c \neq 0$, ϕ è definita dappertutto, pari e tende a zero per $\omega \rightarrow \pm\infty$ con ordine 2:

$$\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \frac{1/\sqrt{(c-\omega^2)^2 + 4b^2\omega^2}}{1/\omega^2} = \lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \left[\left(1 - \frac{c}{\omega^2}\right)^2 + \frac{4b^2}{\omega^2} \right]^{-1/2} = 1.$$

La derivata prima di ϕ è

$$\phi'(\omega) = -\frac{4\omega[\omega^2 - (c - 2b^2)]}{[(c - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2]^{3/2}}.$$

– Se $2b^2 \geq c$, la funzione ha un andamento particolarmente semplice: decresce per $\omega > 0$ e cresce per $\omega < 0$, il suo valore massimo è assunto in $\omega = 0$

$$\max_{\omega \in \mathbb{R}} \phi(\omega) = \phi(0) = \frac{1}{|c|}.$$

– Se $2b^2 < c$, la funzione ha due punti di massimo simmetrici nei valori

$$\omega = \pm\sqrt{c - 2b^2},$$

il massimo della funzione è dato da

$$\max_{\omega \in \mathbb{R}} \phi(\omega) = \phi(\pm\sqrt{c - 2b^2}) = \frac{1}{2|b|\sqrt{c - b^2}}.$$

Il fatto significativo è che questo valore massimo tende a $+\infty$ per $b \rightarrow 0$, cioè se l'effetto dell'attrito è piccolo, per una scelta di ω particolare (vicino a $\sqrt{c - b^2}$), il sistema determinato dall'equazione differenziale risponde al segnale esterno $e^{i\omega t}$ con una distorsione estremamente grande. Questo fenomeno è detto *fenomeno della risonanza* e appare in natura in moltissime situazioni differenti.

CAPITOLO 3

Lo spazio reale multidimensionale

Lo spazio reale d -dimensionale, indicato con \mathbb{R}^d (dove $d \in \mathbb{N}$), è l'insieme costituito da d -ple ordinate, dette **punti** (o **vettori**), e indicate, nel seguito, con la notazione

$$P = (x_1, \dots, x_d)$$

dove x_1, \dots, x_d indicano le coordinate del punto P . Per indicare un secondo punto verrà spesso utilizzata la lettera Q (con corrispondenti coordinate date da (y_1, \dots, y_d)). Nei casi, particolarmente significativi, planare, i.e. $d = 2$, e spaziale, i.e. $d = 3$, le corrispondenti coordinate saranno indicate con

$$P = (x, y), \quad P = (x, y, z),$$

a seconda della situazione considerata.

L'insieme \mathbb{R}^d è uno spazio vettoriale su \mathbb{R} grazie alla presenza delle operazioni di somma e prodotto per uno scalare: dati $P = (x_1, \dots, x_d)$, $Q = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$ e $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$P + Q = (x_1 + y_1, \dots, x_d + y_d), \quad \lambda P = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_d)$$

Il vettore nullo $(0, \dots, 0)$ viene indicato con la lettera O .

La differenza fondamentale tra il caso uni-dimensionale, $d = 1$, e il caso multidimensionale, $d > 1$, sta nel fatto che, mentre a differenza di \mathbb{R} , nello spazio \mathbb{R}^d , $d > 1$, non è definita una nozione di ordine e simboli del tipo $<$, \leq non hanno senso in relazione a vettori di dimensione superiore ad uno¹.

1. Serve una struttura metrica

Il modulo è la distanza di un punto dall'origine del sistema di riferimento. Una volta definita tale distanza, grazie alla struttura di spazio vettoriale, è possibile definire la distanza tra due punti qualsiasi dello spazio. In altri termini, dato il modulo, lo spazio considerato viene dotato di una **struttura metrica**. Da tale struttura discende, a catena, il concetto di limite con annessi e connessi.

Come definire il modulo? Supponiamo di avere scelto come misura delle distanze nel caso unidimensionale, quella definita attraverso il valore assoluto: i punti di \mathbb{R} di

¹In alcuni contesti specifici vengono introdotte relazioni di ordine (parziale) nel caso di \mathbb{R}^d , $d > 1$, ma nessuna di queste sarà considerata in queste Note.

coordinate x e y distano, per definizione, $|x - y|$. Passiamo al caso planare: $d = 2$. Il Teorema di Pitagora afferma che, dato un triangolo rettangolo in \mathbb{R}^2 di vertici $O = (0, 0)$, $P = (x, y)$ e $Q = (x, 0)$ con $x, y > 0$ fissati, vale la relazione

$$\ell(OP)^2 = \ell(OQ)^2 + \ell(QP)^2$$

dove $\ell(AB)$ indica la lunghezza del segmento AB . La lunghezza di segmenti unidimensionali è nota ed è data dal modulo unidimensionale della differenza delle coordinate: nel caso in considerazione $\ell(OQ) = |x - 0|$ e $\ell(QP) = |y - 0|$. Quindi $\ell(OP)^2 = x^2 + y^2$, cioè

$$\ell(OP) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Cosa cambia nel caso tridimensionale? Fissiamo il punto $P = (x, y, z)$ e consideriamo il triangolo rettangolo di vertici $O = (0, 0, 0)$, $P = (x, y, z)$ e $Q = (x, y, 0)$. Il calcolo del caso bidimensionale, mostra che $\ell(OQ)^2 = x^2 + y^2$, quindi, sempre dando fiducia al Teorema di Pitagora, l'espressione della distanza di P da O è data da

$$\ell(OP) = \sqrt{\ell(OQ)^2 + \ell(QP)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

A questo punto, non sorprende la **definizione** seguente.

DEFINIZIONE 1.1. Dato $P = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ si chiama **norma** (o **modulo**, o **valore assoluto**) di P il numero reale

$$(29) \quad |P|_d := \sqrt{x_1^2 + \dots + x_d^2} = \left(\sum_{k=1}^d x_k^2 \right)^{1/2}.$$

Nel caso unidimensionale $d = 1$, la relazione (29) diviene $|x|_1 = \sqrt{x^2}$ che coincide con la usuale definizione di modulo di un numero reale.

OSSERVAZIONE 1.2. Nello spazio \mathbb{R}^d è possibile definire anche il **prodotto scalare**: dati $P = (x_1, \dots, x_d)$ e $Q = (y_1, \dots, y_d)$, si pone $P \cdot Q := x_1 y_1 + \dots + x_d y_d$. La norma di $P \in \mathbb{R}^d$ può essere, allora, riscritta nella forma

$$(30) \quad |P|_d = (P \cdot P)^{1/2}.$$

Il prodotto scalare permette di dare senso al concetto di **ortogonalità** e, per questo motivo, si dice che lo spazio \mathbb{R}^d , considerato con il prodotto scalare \cdot , è dotato di una **struttura euclidea**. Dato che la norma $|\cdot|_d$ definita in (29) discende, attraverso (30), dall'introduzione del prodotto scalare, essa viene anche detta **norma euclidea**.

Per fini pratici, occorre prima di tutto convincersi del fatto che la norma $|\cdot|_d$ gode di proprietà analoghe a quella utilizzate in lungo e in largo nel caso unidimensionale.

PROPOSIZIONE 1.3. (*Proprietà della norma*) Per la norma $|\cdot|_d$ valgono:

- i. (*positività*) $|P|_d \geq 0$ per ogni $P \in \mathbb{R}^d$ e $|P|_d = 0$ se e solo se $P = O$;
- ii. (*omogeneità*) $|\lambda P|_d = |\lambda| |P|_d$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ e $P \in \mathbb{R}^d$;
- iii. (*disuguaglianza triangolare*) per ogni $P, Q \in \mathbb{R}^d$,

$$(31) \quad |P + Q|_d \leq |P|_d + |Q|_d.$$

Premettiamo alla dimostrazione di queste proprietà il risultato seguente.

LEMMA 1.4 (*Disuguaglianza di Cauchy–Schwarz*). Per ogni $P, Q \in \mathbb{R}^d$, vale

$$(32) \quad |P \cdot Q| \leq |P|_d |Q|_d \quad \forall P, Q \in \mathbb{R}^d.$$

DIMOSTRAZIONE DEL LEMMA 1.4. Dato $t \in \mathbb{R}$, si ha $|P + tQ|_d^2 \geq 0$. Inoltre

$$|P + tQ|_d^2 = (P + tQ) \cdot (P + tQ) = |P|_d^2 + 2P \cdot Qt + |Q|_d^2 t^2.$$

Dato che il polinomio di secondo grado $|P|_d^2 + 2P \cdot Qt + |Q|_d^2 t^2$ è sempre non negativo, il suo discriminante $(P \cdot Q)^2 - |P|_d^2 |Q|_d^2$ deve essere minore od uguale a zero; ne segue la disuguaglianza (32). \square

DIMOSTRAZIONE DELLA PROPOSIZIONE 1.3. Le dimostrazioni di **i.** e **ii.** non riservano particolari sorprese e sono lasciate per esercizio al lettore. La proprietà **iii.** segue dalla disuguaglianza di Cauchy–Schwarz. Infatti, utilizzando (32), si ottiene

$$|P + Q|_d^2 = |P|_d^2 + 2P \cdot Q + |Q|_d^2 \leq |P|_d^2 + 2|P \cdot Q| + |Q|_d^2 \leq (|P|_d + |Q|_d)^2.$$

Applicando la radice quadrata al primo e all'ultimo membro, si ottiene (31). \square

La norma euclidea $|\cdot|_d$ gode di un'altra proprietà analoga a quella già vista nel caso unidimensionale.

COROLLARIO 1.5. Per ogni $P, Q \in \mathbb{R}^d$, vale la disuguaglianza

$$(33) \quad ||P|_d - |Q|_d| \leq |P - Q|_d.$$

DIMOSTRAZIONE. La disequazione (33) equivale a

$$|P|_d - |P - Q|_d \leq |Q|_d \leq |P|_d + |P - Q|_d.$$

Entrambe le disuguaglianze sono conseguenza delle proprietà della norma. Infatti:

$$|P|_d - |P - Q|_d = |Q + (P - Q)|_d - |P - Q|_d \leq |Q|_d + |P - Q|_d - |P - Q|_d = |Q|_d$$

$$|Q|_d = |P + (Q - P)|_d \leq |P|_d + |Q - P|_d = |P|_d + |P - Q|_d.$$

La dimostrazione è completa. \square

In prima battuta, lo spazio vettoriale \mathbb{R}^d può essere pensato come uno spazio *isotropo*, cioè uno spazio in cui tutti i punti siano uguali tra di loro. In particolare, non c'è nessun motivo per preferire il punto origine O ad altri punti del piano. Si potrebbe decidere, ad esempio, di cambiare sistema di riferimento applicando una traslazione allo spazio \mathbb{R}^d , cioè si può pensare di scegliere un nuovo punto origine P^0 e di individuare tutti i punti di \mathbb{R}^d attraverso il vettore $P - P^0$ anziché tramite il vettore $P = P - O$. Questa idea suggerisce di utilizzare la traslazione e la norma per introdurre una nozione di distanza tra punti qualsiasi di \mathbb{R}^d .

DEFINIZIONE 1.6. *Dati $P, Q \in \mathbb{R}^d$ si chiama distanza di P da Q il numero reale*

$$(34) \quad d(P, Q) := |P - Q|_d.$$

Dalla definizione (34) e dalla Proposizione 1.3, discendono alcune proprietà per la distanza (la cui dimostrazione è lasciata per indispensabile esercizio).

PROPOSIZIONE 1.7. *(Proprietà della distanza) Per la distanza definita in (34) valgono le seguenti proprietà:*

- i. *(positività) $d(P, Q) \geq 0$ per ogni P, Q e $d(P, Q) = 0$ se e solo se $P = Q$;*
- ii. *(simmetria) $d(P, Q) = d(Q, P)$ per ogni $P, Q \in \mathbb{R}^d$;*
- iii. *(disuguaglianza triangolare) per ogni $P, Q, R \in \mathbb{R}^d$,*

$$(35) \quad d(P, Q) \leq d(P, R) + d(R, Q).$$

OSSERVAZIONE 1.8. Conseguenza immediata della definizione (34), è che la distanza d è *invariante per traslazioni*, cioè per ogni $P, Q \in \mathbb{R}^d$ e per ogni $h \in \mathbb{R}^d$ vale

$$d(P + h, Q + h) = d(P, Q).$$

La distanza in \mathbb{R}^d gode anche di altre proprietà di invarianza. Sia A una trasformazione lineare di \mathbb{R}^n in sè che sia *unitaria*², cioè tale che $A^{-1} = A^t$. Da (30) segue

$$d(AP, AQ) = AP \cdot AQ = P \cdot A^t AQ = P \cdot Q = d(P, Q).$$

Si noti che mentre l'invarianza per traslazioni segue solamente dalla relazione che intercorre tra distanza e norma (si veda la formula (34)), l'invarianza per rotazioni discende dalla specifica scelta operata nella definizione di norma. Con norme diverse, tale invarianza potrebbe non valere.

²Un esempio particolarmente interessante di trasformazione unitaria, nel caso $d = 2$, è dato da

$$A_\theta := \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \theta \in \mathbb{R}$$

La matrice A_θ descrive la trasformazione del piano \mathbb{R}^2 in sè data da una rotazione in senso antiorario di angolo θ attorno al punto O .

Una volta introdotte le nozioni di norma e distanza, si possono definire, senza difficoltà, i concetti di insiemi limitati³ e di intorni di un punto.

DEFINIZIONE 1.9. *Un insieme $A \subset \mathbb{R}^d$ è limitato se esiste $M > 0$ tale che*

$$|P|_d \leq M \quad \forall P \in A.$$

Dato $P_0 \in \mathbb{R}^d$ e $r > 0$, si chiama intorno aperto di centro P_0 e raggio r l'insieme

$$I_r(P_0) := \{P \in \mathbb{R}^d : |P - P_0|_d < r\};$$

si chiama intorno chiuso di centro P_0 e raggio r l'insieme

$$\bar{I}_r(P_0) := \{P \in \mathbb{R}^d : |P - P_0|_d \leq r\}.$$

La condizione di limitatezza può essere formulata anche come segue: un insieme $A \subset \mathbb{R}^d$ è limitato se e solo se è contenuto in un intorno di centro O (e raggio M sufficientemente grande).

Altre norme. Oltre alla norma euclidea, definita in (29), si possono considerare altre espressioni che continuano a soddisfare le stesse proprietà e che pertanto meritano anch'esse il nome di norme. Consideriamo, ad esempio, il caso di \mathbb{R}^2 (analoghe definizioni si possono dare nel caso generale). Dato $p \geq 1$, consideriamo

$$|(x, y)|_{2,p} := (|x|^p + |y|^p)^{1/p}.$$

oppure

$$|(x, y)|_{2,\infty} := \max\{|x|, |y|\}.$$

E' possibile dimostrare che sia ogni norma del tipo $|\cdot|_{2,p}$, $p \in [1, \infty]$, verifica le stesse proprietà esposte nella Proposizione 1.3. Le definizioni di intorno di un punto descrivono insiemi di tipo diverso.

Sussiste, al riguardo di tali varie norme diverse, il seguente risultato.

PROPOSIZIONE 1.10. *Dato $p \in [1, +\infty]$, esistono due costanti m_p e M_p tali che*

$$(36) \quad m_p |(x, y)|_{2,2} \leq |(x, y)|_{2,p} \leq M_p |(x, y)|_{2,2} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

DIMOSTRAZIONE. La disuguaglianza di destra è valida con $M_p = 2^{1/p}$, infatti

$$|(x, y)|_{2,p} = (|x|^p + |y|^p)^{1/p} \leq 2^{1/p} \max\{|x|, |y|\} \leq 2^{1/p} (|x|^2 + |y|^2)^{1/2}.$$

Per l'altra, si può procedere in maniera analoga:

$$|(x, y)|_{2,2} = (|x|^2 + |y|^2)^{1/2} \leq 2^{1/2} \max\{|x|, |y|\} \leq 2^{1/2} (|x|^p + |y|^p)^{1/p},$$

ottenendo la disuguaglianza di sinistra con $m_p := 2^{-1/2}$. □

³Dato che in \mathbb{R}^d , $d > 1$, non sono definite nozioni di ordinamento, non ha senso parlare di insiemi superiormente/inferiormente limitati.

Dalle disuguaglianze (36) segue che:

- gli insiemi limitati rispetto alla norma euclidea e quelli rispetto alla norma $|\cdot|_{2,p}$ coincidono;
- anche se gli intorni relativi a norme diverse sono diversi, all'interno di ogni intorno relativo ad una norma, è sempre contenuto un intorno (se necessario di raggio più piccolo) relativo all'altra norma. Questa proprietà è particolarmente rilevante nell'ambito delle proprietà di convergenza (che vedremo tra poche righe).

Versioni analoghe della Proposizione 1.10 valgono per qualsiasi norma in \mathbb{R}^d che verifichi le proprietà elencate nella Proposizione 1.3.

2. Quattro salti in \mathbb{R}^d : successioni di punti

Una successione di punti in \mathbb{R}^d è un'applicazione da \mathbb{N} a \mathbb{R}^d che associa ad ogni numero naturale n un punto P^n di \mathbb{R}^d . Tramite la definizione di distanza è possibile definire il concetto di limite di una successione $P^n \in \mathbb{R}^d$ utilizzando la stessa definizione del caso unidimensionale.

DEFINIZIONE 2.1. *Siano $P^n, \bar{P} \in \mathbb{R}^d$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. La successione P^n converge a \bar{P} per $n \rightarrow +\infty$ e si scrive $\lim_{n \rightarrow +\infty} P^n = \bar{P}$ se*

$$(37) \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_\varepsilon, \quad \text{vale } |P^n - \bar{P}|_d < \varepsilon.$$

Che cosa vuol dire, in concreto, che la successione P^n converge a \bar{P} per $n \rightarrow +\infty$? La definizione (37) va letta a partire dalla fine: alcuni punti della successione P^n distano meno di ε dal punto limite \bar{P} . Quindi, la convergenza di P^n a \bar{P} indica una proprietà di "vicinanza" di (alcuni) punti della successione al corrispondente punto limite. Occorre precisare, però, **quanto** siano vicini tali punti al punto limite e **quali** siano i punti a godere di tale proprietà. È a questo fine che vengono introdotti i (misteriosi) valori ε e n_ε . La "vicinanza" è quantificata dal parametro ε , che è **qualsiasi**. L'arbitrarietà di ε fa in modo che la definizione sia interessante qualsiasi sia la scala significativa considerata, indipendentemente dal gusto e dalla preferenza dell'utente di turno. Più il valore di ε è piccolo e più la condizione $|P^n - \bar{P}|_d < \varepsilon$ diviene restrittiva e, di conseguenza, soddisfatta da un minor numero di punti della successione. Il valore n_ε permette di individuare punti della successione per cui la relazione è soddisfatta. La richiesta, nella definizione di limite, è che la distanza di P_n da \bar{P} sia minore di ε tutte le volte che si scelgano indici n sufficientemente grandi. In definitiva, fissata una qualsiasi soglia di errore $\varepsilon > 0$, i termini della successione P_n sono ben approssimati da \bar{P} per tutte le scelte di n maggiori di n_ε .

OSSERVAZIONE 2.2. La nozione di convergenza si basa sulla definizione di distanza. Disponendo di metriche diverse potrebbe quindi accadere che una stessa successione $\{P^n\}$ sia convergente rispetto a certe metriche e non convergente rispetto ad altre. Il risultato della Proposizione 1.10 consente di riconoscere che se una successione $\{P^n\}$ è convergente rispetto alla metrica euclidea lo è anche rispetto alle metriche $|\cdot|_{2,p}$. Per questo motivo, metriche che verifichino stime del tipo (36) si dicono essere **equivalenti** alla metrica euclidea.

Come nel caso del limite di successioni reali, anche il limite di successioni di punti di \mathbb{R}^d è lineare: se P^n e Q^n sono due successioni convergenti, rispettivamente, a P e Q ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha P^n + \beta Q^n = \alpha P + \beta Q \quad \text{per ogni } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

La dimostrazione è conseguenza immediata della disuguaglianza

$$|(\alpha P^n + \beta Q^n) - (\alpha P + \beta Q)|_d \leq |\alpha| |P^n - P|_d + |\beta| |Q^n - Q|_d.$$

Inoltre, come nel caso reale, il limite di una successione, quando esiste, è unico.

Una successione di punti P^n è individuata univocamente dalle successioni reali delle sue coordinate. Che relazione intercorre tra la convergenza della successione P^n e quella delle successioni delle coordinate?

PROPOSIZIONE 2.3. *Sia $P^n = (x_1^n, \dots, x_d^n)$ e $\bar{P} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_d)$. Allora la successione P^n converge a \bar{P} se e solo se*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_j^n = \bar{x}_j \quad \text{per ogni } j = 1, \dots, d.$$

DIMOSTRAZIONE. Dalla definizione di distanza in \mathbb{R}^d , segue

$$|x_j^n - \bar{x}_j| \leq |P^n - \bar{P}|_d = \left(\sum_{k=1}^d (x_k^n - \bar{x}_k)^2 \right)^{1/2}$$

per ogni $j \in \{1, \dots, d\}$. Di conseguenza, se $|x_k^n - \bar{x}_k|$ tende a 0 per ogni k , allora anche $|P^n - \bar{P}|_d$ tende a zero. Viceversa, se $|P^n - \bar{P}|_d$ tende a zero, anche la successione reale $|x_j^n - \bar{x}_j|$ tende a zero per $n \rightarrow +\infty$ per ogni j . \square

La Proposizione 2.3 indica che determinare il limite di una successione di punti in \mathbb{R}^d equivale a determinare i limiti di d successioni reali. Ad esempio, per le successioni $P_n := (1/n^2, e^{1/n})$ e $Q_n := (n \sin(1/n), \sin n/n)$ valgono i limiti $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = (0, 1)$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n = (1, 0)$.

Come nel caso uni-dimensionale, ogni successione convergente è anche limitata e, di conseguenza, una successione non limitata non può essere convergente.

PROPOSIZIONE 2.4. Sia $\{P^n\}$ una successione convergente. Allora la successione $\{P^n\}$ è limitata.

DIMOSTRAZIONE. Sia \bar{P} il limite della successione P^n . Per definizione, esiste n_1 tale che $|P^n - \bar{P}|_d < 1$ per ogni $n \geq n_1$. Vale quindi la stima

$$|P^n|_d \leq |\bar{P}|_d + |P^n - \bar{P}|_d < |\bar{P}|_d + 1 \quad \forall n \geq n_1.$$

Per dimostrare la limitatezza della successione, basta controllare la norma dei termini P^0, \dots, P^{n_1-1} . Quindi, scegliendo

$$M := \max\{|P^0|_d, \dots, |P^{n_1-1}|_d, |\bar{P}|_d + 1\},$$

si ha che $|P^n| \leq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. □

ESERCIZIO 2.5. Siano P^n e Q^n due successioni in \mathbb{R}^d che convergono, rispettivamente, a \bar{P} e \bar{Q} . Dimostrare che la successione $a_n := P^n \cdot Q^n$ converge a $P \cdot Q$.

La limitatezza non è una condizione sufficiente per la convergenza: si pensi all'esempio facile della successione $a_n = (-1)^n$. Occorre, quindi, qualche ipotesi aggiuntiva oltre alla limitatezza per essere certi della convergenza della successione in questione. Nel caso uni-dimensionale, ad esempio, vale il *criterio di monotonia*: una successione di numeri reali limitata e monotona è convergente. Nel caso di successioni vettoriali, dato che in \mathbb{R}^n non è possibile introdurre un ordinamento totale se $n \geq 2$, non esiste un analogo di questo criterio.

L'ipotesi di limitatezza, dunque, non implica la convergenza della successione assegnata. E' vero però una proprietà più debole che necessita la definizione seguente.

DEFINIZIONE 2.6. Data la successione di punti $\{P^n\}$ e una successione $\{n_k\}$ di numeri naturali, strettamente crescente, la successione $\{P^{n_k}\}$ si dice essere una **sottosuccessione** della successione $\{P^n\}$.

Il termine sottosuccessione pu' essere chiarito tramite alcuni esempi. Data la successione $\{n\} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ dei numeri naturali:

– le successioni

$$\{1, 3, 5, 7, \dots, 2k + 1, \dots\}, \quad \{1, 10, 100, 1000, \dots, 10^k, \dots\}$$

sono sottosuccessioni della successione assegnata;

– le successioni

$$\{1, 2, 3, \pi, 4, \dots\}, \quad \{1, 3, 2, 4, \dots\}, \quad \{1, 2, 2, 3, 4, \dots\}$$

non sono sottosuccessioni della successione dei naturali $\{n\}$.

Dalla definizione di convergenza, segue immediatamente che se una successione di punti $\{P^n\}$ converge a \bar{P} allora tutte le sottosuccessioni di $\{P^n\}$ convergono allo stesso punto limite \bar{P} .

TEOREMA 2.7 (*Teorema di Bolzano–Weierstrass*). *Da ogni successione limitata $\{P^n\}$ è possibile estrarre almeno una sottosuccessione $\{P^{n_k}\}$ convergente.*

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione è divisa in due passi: prima si considera il caso di \mathbb{R} e poi il caso generale.

1. **Caso uni-dimensionale.** Dimostriamo prima di tutto il Teorema nel caso uni-dimensionale. Sia $\{x^n\}$ una successione reale limitata, cioè interamente contenuta nell'intervallo $I_0 := [a, b]$ per qualche $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Consideriamo i sotto-intervalli I_0^\pm definiti da

$$I_0^- := \left[a, \frac{a+b}{2} \right], \quad I_0^+ := \left[\frac{a+b}{2}, b \right].$$

Dato che x^n è composta da un numero infinito di elementi, almeno uno dei due sotto-intervalli I_0^\pm contiene infiniti elementi della successione x^n . Indichiamo con I_1 , quello dei due sotto-intervalli per cui è verificata tale proprietà e con a_1, b_1 i suoi estremi, $I = [a_1, b_1]$ e ripetiamo il ragionamento precedente. Consideriamo i sotto-intervalli I_1^\pm definiti da

$$I_1^- := \left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2} \right], \quad I_1^+ := \left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1 \right].$$

Dato che un numero infinito di elementi $\{x^n\}$ si trovano in I_1 , almeno uno dei due sotto-intervalli I_1^\pm contiene infiniti elementi della successione x^n . Indichiamo con I_2 tale sotto-intervallo.

Iterando il procedimento, si costruisce una successione di intervalli chiusi e limitati I_n , ciascuno contenente un numero infinito di elementi della successione $\{x^n\}$. Per l'assioma degli intervalli incapsulati, esiste $\ell \in \mathbb{R}$ contenuto in I_n per ogni n . Costruiamo ora una sottosuccessione $\{x^{n_k}\}$ di $\{x^n\}$ come segue:

- scegliamo n_1 in modo che $x^{n_1} \in I_1$;
- scegliamo $n_2 > n_1$ in modo che $x^{n_2} \in I_2$;
- in generale, scegliamo $n_{k+1} > n_k$ in modo che $x^{n_{k+1}} \in I_{k+1}$.

Per costruzione, $|x^{n_k} - \ell| < (b-a)/2^k$, e, di conseguenza, la sottosuccessione x^{n_k} converge ad ℓ .

2. **Caso multi-dimensionale.** Consideriamo il caso di successioni in \mathbb{R}^2 (il caso generale è analogo). Sia $\{P^n\} = \{(x^n, y^n)\}$ una successione limitata in \mathbb{R}^2 . Ne segue che anche le due successioni di numeri reali delle coordinate $\{x^n\}$ e $\{y^n\}$ sono limitate, Applicando alla successione $\{x^n\}$ il teorema di Bolzano–Weierstrass uni-dimensionale, si deduce che esiste una sotto-successione $\{x^{n_k}\}$ convergente.

La sottosuccessione $\{y^{n_k}\}$, estratta dalla successione $\{y^n\}$ con gli stessi indici della sotto-successione $\{x^{n_k}\}$, è limitata. Applicando nuovamente il teorema di Bolzano–Weierstrass unidimensionale, si deduce l'esistenza di una sotto-sotto-successione $\{y_{n_{k_j}}\}$

convergente. La successione $P^{n_{k_j}} := (x_{n_{k_j}}, y_{n_{k_j}})$, avendo entrambe le successioni delle coordinate convergenti, è una successione convergente. \square

Il criterio di Cauchy. Tramite il Teorema di Bolzano–Weierstrass si dimostra una condizione necessaria e sufficiente per la convergenza di successioni di punti: il criterio di Cauchy.

TEOREMA 2.8 (Criterio di Cauchy). *Una successione P^n in \mathbb{R}^d è convergente se e solo se vale la condizione seguente*

$$(38) \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \quad \forall m, n \geq n_\varepsilon, \quad \text{vale} \quad |P^m - P^n|_d < \varepsilon.$$

DIMOSTRAZIONE. Se la successione P^n converge a \bar{P} , vale la stima

$$|P^m - P^n|_d \leq |P^m - \bar{P}|_d + |P^n - \bar{P}|_d,$$

da cui segue che la condizione (38).

Viceversa, se la successione $\{P^n\}$ è di Cauchy, allora è anche limitata. Infatti, scegliendo $\varepsilon = 1$, si deduce, da (38), che, per un opportuno $n_1 \in \mathbb{N}$ vale

$$|P^n|_d \leq |P^{n_1}|_d + |P^n - P^{n_1}|_d < |P^{n_1}|_d + 1$$

per ogni $n \geq n_1$. Posto $M := \max\{|P^0|_d, |P^1|_d, \dots, |P^{n_1-1}|_d, |P^{n_1}|_d + 1\}$, si ha

$$|P^n|_d \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Grazie al Teorema di Bolzano–Weierstrass, si deduce che esiste una sottosuccessione $\{P^{n_k}\}$ convergente ad un opportuno punto limite \bar{P} . Per dimostrare che tutta la successione P^n converge a \bar{P} , basta utilizzare la stima

$$|P^n - \bar{P}|_d \leq |P^n - P^{n_k}|_d + |P^{n_k} - \bar{P}|_d$$

e lavorare con accortezza con ε e n_ε . I dettagli sono lasciati al volenteroso lettore. \square

ESERCIZIO 2.9. Sia $\{P^n\}$ tale che, per qualche $\theta \in [0, 1)$ valga la condizione

$$|P^{n+1} - P^n|_d \leq \theta |P^n - P^{n-1}|_d \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Dimostrare che la successione P^n converge ad un $\bar{P} \in \mathbb{R}^d$.

La condizione (38) non necessita la conoscenza esplicita del limite \bar{P} . Tale fatto permette di utilizzare il criterio di Cauchy come mattone fondamentale per una costruzione rigorosa dell'insieme dei numeri reali a partire dai numeri razionali (o, più in generale, per una costruzione dell'insieme \mathbb{R}^d a partire da \mathbb{Q}^d). L'idea di base sta nel fatto che un numero reale è individuato da una successione (razionale) che lo approssimi con un errore piccolo quanto si vuole. Ad esempio, per approssimare/definire il numero (irrazionale) π si può considerare la successione di numeri (razionali)

$$a_0 = 3 \quad a_1 = 3,1 \quad a_2 = 3,14 \quad a_3 = 3,141 \quad a_4 = 3,1415 \quad a_5 = 3,14159 \quad \dots,$$

cioè l'elemento a_n è quello che si ottiene considerando i primi n decimali del numero π .

Da questo punto di vista, un numero è individuato da una **successione di Cauchy** in \mathbb{Q} , cioè da una successione a_n tale che

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}, \quad \varepsilon > 0, \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \quad \text{tale che} \quad |a_m - a_n| < \varepsilon \quad \forall m, n \geq n_\varepsilon.$$

L'insieme delle successioni di Cauchy

$$S = \{ \{x_n\} : \text{successione di Cauchy in } \mathbb{Q} \}.$$

consta, però, di troppi elementi: esistono successioni diverse che rappresentano lo stesso numero (basta pensare a due diverse successioni di razionali che tendano a zero). Occorre quindi raggruppare gli elementi di S in classi di equivalenza, in modo che ogni singola classe rappresenti un singolo numero reale. La relazione d'equivalenza si definisce così: date $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ in S

$$\{x_n\} \sim \{y_n\} \quad \text{se} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n - y_n) = 0.$$

E' facile verificare che si tratta di una relazione di equivalenza (riflessività e simmetria sono banali, la transitività discende dalla disuguaglianza triangolare). A questo punto il gioco è fatto: l'insieme dei numeri reali è il quoziente $\mathbb{R} := S / \sim$.

3. Informazioni di base sulla topologia di \mathbb{R}^d

Partiamo da un problema prototipo: data una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, determinare una soluzione dell'equazione

$$(39) \quad f(P) = 0.$$

Supponiamo di essere in grado di dimostrare l'esistenza di P^n tali che $f(P^n)$ non sia nullo, ma verifichi la stima

$$|f(P^n)| \leq \frac{1}{n}.$$

Il limite \bar{P} della successione P^n è un buon candidato ad essere soluzione di (39), ma...

- ...la successione P^n è convergente ad un limite P ?
- ...il limite P appartiene all'insieme A ?
- ...è vero che $f(P) = 0$?

Ciascuna di queste domande porta all'introduzione di un concetto importante: la compattezza, la chiusura, la continuità. A seguire, vediamo i primi due, mentre il terzo sarà esplorato in lungo e in largo più avanti.

DEFINIZIONE 3.1. *Un insieme $C \subset \mathbb{R}^d$ è chiuso (rispetto all'operazione di limite) se per ogni successione $P^n \in C$ convergente il punto limite \bar{P} appartiene all'insieme C .*

ESEMPIO 3.2. Il prodotto cartesiano $[a, b] \times [c, d]$ è un insieme chiuso di \mathbb{R}^2 , per ogni scelta di $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Infatti, sia $P^n = (x^n, y^n) \in [a, b] \times [c, d]$ una successione convergente al limite $\bar{P} = (\bar{x}, \bar{y})$. Dato che

$$a \leq x^n \leq b, \quad c \leq y^n \leq d, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

passando al limite per $n \rightarrow +\infty$, si deduce che $(\bar{x}, \bar{y}) \in [a, b] \times [c, d]$.

ESEMPIO 3.3. L'insieme dei numeri naturali \mathbb{N} in \mathbb{R} è un insieme chiuso. Infatti, se x_n è una successione di numeri naturali convergente ad \bar{x} , si ha che, per qualche \bar{n} , vale la stima $|x_n - \bar{x}| < 1/2$ per ogni $n \geq \bar{n}$. Se $m, n \geq \bar{n}$, si ha

$$|x_n - x_m| \leq |x_n - \bar{x}| + |x_m - \bar{x}| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

e, di conseguenza, $x_n = x_m$. Quindi la successione è costante per $n \geq \bar{n}$ e, pertanto, convergente.

ESERCIZIO 3.4. Sia C un insieme finito di punti. Dimostrare che C è chiuso.

In generale, una successione contenuta in un insieme chiuso potrebbe non essere convergente. Occorre, quindi, una condizione che garantisca, quanto meno, la convergenza di una qualche sottosuccessione della successione data. Eccola.

DEFINIZIONE 3.5. Un insieme $K \subset \mathbb{R}^d$ è compatto (per successioni)⁴ se da ogni successione $P^n \in K$ è sempre possibile estrarre una sottosuccessione P^{n_k} convergente a qualche $\bar{P} \in K$.

ESEMPIO 3.6. Il prodotto cartesiano $[a, b] \times [c, d]$ è un insieme compatto di \mathbb{R}^2 , per ogni scelta di $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Infatti, sia $P^n = (x^n, y^n) \in [a, b] \times [c, d]$. Dato che la successione P^n è limitata, essa ammette, per il Teorema di Bolzano–Weierstrass una sottosuccessione P^{n_k} convergente ad un qualche punto \bar{P} e, dato che $[a, b] \times [c, d]$ è chiuso, il punto \bar{P} appartiene ad $[a, b] \times [c, d]$.

Tutti gli insiemi compatti sono anche chiusi. Infatti, se $P^n \in K$ è una successione convergente a \bar{P} , ogni sottosuccessione P^{n_k} converge allo stesso limite \bar{P} . Per definizione, quindi, \bar{P} appartiene ad K . Il viceversa non è vero: esistono insiemi chiusi che non sono compatti.

ESEMPIO 3.7. L'insieme dei numeri naturali \mathbb{N} in \mathbb{R} non è compatto. Infatti, tutte le sottosuccessioni di $a_n = n$ sono illimitate e quindi non convergenti.

La limitatezza impedisce alle successioni di "scappare" all'infinito e, insieme alla chiusura, garantisce l'esistenza di sottosuccessioni convergenti.

⁴Esistono anche altre definizioni di compattezza, utilizzate in ambiti più generali, che comunque, nel caso di \mathbb{R}^d coincidono con la compattezza per successioni.

TEOREMA 3.8 (*Insiemi compatti di \mathbb{R}^d*). *Un sottoinsieme K di \mathbb{R}^d è compatto (per successioni) se e solo se è chiuso e limitato.*

DIMOSTRAZIONE. Sia K compatto e, di conseguenza, chiuso. Supponiamo, per assurdo, che K non sia limitato. Allora, per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste P^{n_k} tale che $|P^{n_k}|_d \geq n$ e, di conseguenza,

$$(40) \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} |P^{n_k}|_d = +\infty.$$

Dato che K è compatto, esiste una sottosuccessione di P^{n_k} , che indichiamo per semplicità (e con abuso di notazione...) sempre con P^{n_k} convergente a qualche $\bar{P} \in K$. In particolare, dato che

$$||P^{n_k}|_d - |\bar{P}|_d| \leq |P^{n_k} - \bar{P}|_d,$$

la successione reale $|P^{n_k}|_d$ converge a $|\bar{P}|_d$, in contraddizione con (40).

Viceversa, sia A chiuso e limitato e sia P^n una successione in K . Per il Teorema di Bolzano–Weierstrass, Teorema 2.7, è possibile estrarre una sottosuccessione P^{n_k} convergente ad un punto \bar{P} . Dato che l'insieme K è chiuso, il punto limite appartiene ad K ed è quindi verificata la proprietà di compattezza. \square

Parallelamente alla nozione di insieme chiuso, si introduce anche la nozione di insieme aperto.

DEFINIZIONE 3.9. *Sia $S \subseteq \mathbb{R}^d$. Un punto $P \in \mathbb{R}^d$ è interno ad S se esiste $r > 0$ tale che $I_r(P) = \{P \in \mathbb{R}^d : |P - P_0|_d < r\} \subseteq S$. Un punto $P \in \mathbb{R}^d$ è esterno ad S se è interno all'insieme complementare $\mathbb{R}^d \setminus S$, cioè se esiste $r > 0$ tale che $S \cap I_r(P) = \emptyset$.*

Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^d$ si dice aperto se i suoi punti sono tutti interni.

ESEMPIO 3.10. Dati $a, b, c \in \mathbb{R}$ l'insieme $A := \{ax + by + c > 0\} \subset \mathbb{R}^2$ è aperto. Infatti, dato $P_0 = (x_0, y_0) \in A$, si ha $I_r(P_0) \subseteq A$ per ogni scelta di r strettamente minore della distanza P_0 dalla retta di equazione $ax + by + c = 0$.

ESEMPIO 3.11. Dati $a, b, c \in \mathbb{R}$ l'insieme $C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by + c \geq 0\}$ non è aperto. Infatti, tutti i punti della forma $P_0 = (x_0, y_0)$ con $ax_0 + by_0 + c = 0$ appartengono a C , ma ogni intorno di tali punti contiene sempre punti non appartenenti a C . Analogo discorso vale per l'insieme $C_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by + c = 0\}$.

Che relazione intercorre tra insiemi aperti e insiemi chiusi?

PROPOSIZIONE 3.12. *Un insieme A è aperto se e solo se il suo complementare $C := \mathbb{R}^d \setminus A$ è chiuso.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo A aperto e dimostriamo che $C := \mathbb{R}^d \setminus A$ è chiuso. Sia $\{P^n\}$ una successione di punti in C convergente a \bar{P} . Se, per assurdo, \bar{P} appartenesse ad A , esisterebbe $r > 0$ tale che $I_r(\bar{P}) \subseteq A$. In particolare, per ogni n si avrebbe $|P^n - \bar{P}| \geq r > 0$ in contraddizione con il fatto che la successione P^n converge a \bar{P} .

Supponiamo $C = \mathbb{R}^d \setminus A$ chiuso e dimostriamo che A è aperto. Se, per assurdo, A non fosse aperto, esisterebbe $\bar{P} \in A$ non interno ad A . Quindi, per ogni $n \in \mathbb{N}$, esisterebbe $P^n \in C$ tale che $P^n \in I_{1/n}(\bar{P})$. La successione P^n sarebbe allora convergente al punto \bar{P} , in contraddizione con l'ipotesi. \square

Gli insiemi aperti e gli insiemi chiusi sono chiusi rispetto all'operazione di unione e di intersezione: cioè valgono le affermazioni seguenti

- se A_1, A_2 sono aperti, allora anche $A_1 \cup A_2, A_1 \cap A_2$ sono aperti;
- se C_1, C_2 sono chiusi, allora anche $C_1 \cup C_2, C_1 \cap C_2$ sono chiusi.

OSSERVAZIONE 3.13. Nel caso di unione o intersezione di un numero infinito di aperti/chiusi, la situazione è un po' più delicata. Valgono le implicazioni seguenti:

- se $A_n, n \in \mathbb{N}$, è una successione di aperti, allora l'unione $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ è un aperto;
- se $C_n, n \in \mathbb{N}$, è una successione di chiusi, allora l'intersezione $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$ è un chiuso.

Non è difficile costruire esempi di successioni di aperti la cui intersezione sia un chiuso e successioni di chiusi la cui unione sia un aperto. Provateci.

Per ogni insieme $S \subset \mathbb{R}^d$ è possibile distinguere tre categorie di punti: i punti interni, i punti esterni e... gli altri, cioè i punti che non sono né interni né esterni ad S .

DEFINIZIONE 3.14. Un punto $P \in \mathbb{R}^d$ è un **punto di frontiera** dell'insieme S se ogni intorno di P contiene punti di S e punti non appartenenti ad S : per ogni $r > 0$,

$$S \cap I_r(P_0) \neq \emptyset, \quad (\mathbb{R}^d \setminus S) \cap I_r(P_0) \neq \emptyset.$$

L'insieme dei punti di frontiera di S si chiama **frontiera di S** e si denota con ∂S .

Si chiama **chiusura dell'insieme S** l'insieme $\bar{S} := S \cup \partial S$.

La chiusura \bar{S} di un insieme S è il più piccolo insieme chiuso contenente S .

ESEMPIO 3.15. Per gli insiemi

$$A := \{(x, y) : ax + by + c < 0\}, \quad C := \{(x, y) : ax + by + c \leq 0\}.$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$, si ha $\partial A = \partial C = \{(x, y) : ax + by + c = 0\}$. A voi la verifica.

ESEMPIO 3.16. Per gli insiemi

$$A := \{(x, y) : x^2 + y^2 < r^2\}, \quad C := \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq r^2\},$$

con $r > 0$, si ha $\partial A = \partial C = \{(x, y) : x^2 + y^2 = r^2\}$.

ESERCIZIO 3.17. Determinare la frontiera e la chiusura dei seguenti insiemi

$$\begin{aligned} S_1 &= \{(x, y) : 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}, & S_2 &= \{(x, y) : x + y + 1 < 0, x + 1 < 0\}, \\ S_3 &= \{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}, & S_4 &= \{(x, y) : x, y \geq 0, x + y \leq 0\} \end{aligned}$$

ESERCIZIO 3.18. Dimostrare che la frontiera di un insieme S e del suo complementare $T := \mathbb{R}^d \setminus S$ coincidono, cioè $\partial S = \partial T$.

Come espresso dal seguente risultato (la cui dimostrazione è lasciata come esercizio), gli insiemi aperti e gli insiemi chiusi hanno una relazione particolare con la loro frontiera.

PROPOSIZIONE 3.19. *Un insieme A è aperto se e solo se $A \cap \partial A = \emptyset$; un insieme C è chiuso se e solo se $\partial C \subseteq C$.*

4. Natura non facit saltus: le curve

Una successione di punti $P^n \in \mathbb{R}^d$ può essere interpretata come una sequenza di posizioni nello spazio d -dimensionale di una particella in movimento che viene osservata ad istanti successivi $t_0 < t_1 < \dots < t_n < \dots$: il punto P^n è la posizione all'istante t_n . Una maniera altrettanto (o più?) interessante per descrivere il moto di un punto è quella di considerare che la variabile temporale non vari in un insieme discreto, ma in un insieme continuo⁵. Questo corrisponde, in concreto a considerare funzioni del tipo

$$\phi : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^d$$

dove I è un intervallo di \mathbb{R} , che associano ad uno scalare $t \in I$ il vettore $\phi(t) = (\phi_1(t), \dots, \phi_d(t))$. La funzione ϕ_i che associa a t la i -esima componente di $\phi(t)$ si chiama i -esima componente di ϕ .

Tenendo conto della definizione di modulo in \mathbb{R}^d , è possibile, senza fatica, introdurre il concetto di continuità anche in questo contesto.

DEFINIZIONE 4.1. *Sia I un intervallo di \mathbb{R} . Una funzione $\phi : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^d$ è continua in $t_0 \in I$ se*

$$(41) \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 \quad \text{tale che} \quad |\phi(t) - \phi(t_0)|_d < \varepsilon \quad \forall t \in I, |t - t_0| < \varepsilon.$$

Una funzione $\phi : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^d$ è continua in I se è continua in tutti i punti di I . L'insieme delle curve $\phi : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ continue in I si indica con il simbolo $C(I; \mathbb{R}^d)$.

⁵La locuzione latina *Natura non facit saltus*, formulata per la prima volta da Carl von Linné, nella *Philosophia Botanica*, è stata utilizzata da Leibniz come assioma per negare l'esistenza di quantità discrete indivisibili ed esprimere che i processi naturali variano in maniera continua.

Dalla definizione di modulo e seguendo una strategia analoga a quella utilizzata nella Proposizione 2.3, si dimostra che la continuità della funzione ϕ equivale alla continuità di tutte le sue componenti ϕ_i .

Una sottoclasse delle funzioni continue è data dalle cosiddette *funzioni lipschitziane*: una funzione $\phi \in C(I; \mathbb{R}^d)$ si dice **lipschitziana** se esiste $L > 0$ tale che

$$(42) \quad |\phi(t) - \phi(\tau)|_d \leq L|t - \tau| \quad \forall t, \tau \in I.$$

In questo caso, la condizione di continuità (41) è verificata scegliendo $\delta = \varepsilon/L$. Come si vede, il valore di δ è indipendente dal punto t_0 di continuità. Sempre ragionando come nella Proposizione 2.3, si può mostrare che una funzione ϕ è lipschitziana se e solo se tutte le sue componenti ϕ_i sono lipschitziane.

Nella logica della descrizione di un moto nello spazio, è ragionevole restringere l'attenzione a funzioni ϕ le cui componenti ϕ_1, \dots, ϕ_d sono derivabili. In questo modo, per ogni valore $t \in I$ è ben definito il **vettore velocità** $\phi'(t) = (\phi'_1(t), \dots, \phi'_d(t))$. L'insieme delle curve $\phi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ con derivata ϕ' continua, si indica con il simbolo $C^1(I; \mathbb{R}^d)$.

DEFINIZIONE 4.2. *Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo di estremi a e b . Una curva parametrizzata regolare è un'applicazione $\phi \in C^1(I; \mathbb{R}^d)$ tale che*

$$(43) \quad \phi'(t) \neq 0 \quad \forall t \in I.$$

Una curva parametrizzata regolare a tratti è un'applicazione $\phi \in C(I; \mathbb{R}^d)$ tale che esiste un insieme $S = \{a < t_0 < t_1 < \dots < t_N < b\} \subset I$ per cui vale

$$\phi \text{ è regolare a tratti in } [a, t_0] \cap I, [t_1, t_2], \dots, [t_{N-1}, t_N], [t_N, b] \cap I$$

*In entrambi i casi, l'insieme immagine $\phi(I)$ è detto **supporto della curva**.*

Da un punto di vista cinematico, la funzione ϕ che definisce la curva è la **legge oraria** del moto in questione, mentre l'insieme immagine $\phi(I)$ ne è la **traiettoria**. Si noti che la stessa traiettoria può essere percorsa con leggi orarie diverse e che, parallelamente, curve parametrizzate diverse possono avere lo stesso supporto.

La condizione $\phi'(t_0) \neq 0$ equivale a richiedere che il moto del punto descritto dalla legge oraria ϕ non abbia mai velocità nulla; dal punto di vista geometrico, essa garantisce l'esistenza in ogni punto della curva di una retta tangente, la cui equazione parametrica è $P = \phi(t_0) + \phi'(t_0)h$ con $h \in \mathbb{R}$.

Segmenti e poligonalì. Consideriamo due punti distinti $P_0, P_1 \in \mathbb{R}^d$. Come descrivere un moto da P_0 a P_1 lungo una linea retta (cioè per la via più rapida)? In altre parole, come parametrizzare il segmento $\overline{P_0P_1}$? E' immediato riconoscere che la definizione seguente

$$\phi(t) = P_0 + t(P_1 - P_0) \quad t \in [0, 1],$$

risolve la questione. Come si nota facilmente, si ha $\phi'(t) = P_1 - P_0 \neq 0$ per ogni t e, di conseguenza, la curva ϕ è effettivamente regolare.

Ovviamente, esistono (infinite) altre maniere di parametrizzare un segmento.

ESEMPIO 4.3. Il segmento nel piano di estremi $(0, 1)$ e $(1, 0)$ è parametrizzato da

$$\begin{cases} x = x(t) = t, \\ y = y(t) = 1 - t \end{cases} \quad t \in [0, 1].$$

Lo stesso segmento può essere parametrizzato in tante maniere diverse, ad esempio da

$$\begin{cases} x = x(\tau) = 1 - \cos(\tau), \\ y = y(\tau) = \sin(\tau) \end{cases} \quad \tau \in [0, \pi/2].$$

Le due rappresentazioni parametriche offerte differiscono dal punto di vista cinematico. Calcolando i corrispondenti vettori velocità si ha

$$(x', y')(t) = (1, -1) \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = \sqrt{2},$$

$$(x', y')(\tau) = \sin(\tau)(1, -1) \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x'(\tau)^2 + y'(\tau)^2} = \sqrt{2} \sin(\tau).$$

Quindi, nel primo caso, il moto è rettilineo uniforme (i.e. la velocità è costante), nel secondo, il moto è ancora rettilineo, ma la velocità cresce al crescere di $\tau \in [0, \pi/2]$.

Consideriamo tre punti distinti $P_0, P_1, P_2 \in \mathbb{R}^d$. Come parametrizzare il percorso da P_0 a P_2 passando per P_1 , ottenuto percorrendo i segmenti $\overline{P_0P_1}$ e $\overline{P_1P_2}$? Basta operare piccole modifiche alla parametrizzazione vista per il caso di un singolo segmento:

$$\phi(t) = \begin{cases} P_0 + t(P_1 - P_0) & t \in [0, 1], \\ P_1 + (t - 1)(P_2 - P_1) & t \in (1, 2] \end{cases}$$

In questo caso,

$$\phi'(t) = \begin{cases} P_1 - P_0 & t \in [0, 1), \\ P_2 - P_1 & t \in (1, 2] \end{cases}$$

quindi, in generale, la parametrizzazione è solo regolare a tratti. In questo caso l'insieme S della Definizione 4.2 è composto da un singolo elemento: $S = \{1\}$.

Passiamo al caso generale di $n + 1$ punti.

DEFINIZIONE 4.4. *Assegnati $n + 1$ punti $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$ si dice poligonale S da essi determinata l'insieme unione degli n segmenti $\overline{P_0P_1}, \dots, \overline{P_{n-1}P_n}$. I punti $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$ sono detti vertici della poligonale e i due punti P_0 e P_n si dicono estremi della poligonale S .*

Parametrizzare una poligonale Π non è così proibitivo: basta porre

$$\phi(t) = P_k + (t - k)(P_{k+1} - P_k) \quad \forall t \in [k, k + 1], \quad k \in [0, n - 1].$$

Anche, in questo caso, in generale, la parametrizzazione è solo regolare a tratti con $S = \{1, 2, \dots, n\}$.

Altri esempi di curve. Il caso più noto è quello dei grafici di funzioni. Data $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 , il grafico della funzione f si parametrizza banalmente ponendo

$$\phi(t) = (t, f(t)) \quad t \in I.$$

Dato che $\phi'(t) = (1, f'(t))$, la curva è regolare.

Non serve un grande sforzo per trovare qualche esempio di curva che non sia un grafico di funzione. Dati $P_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ed $r > 0$, la circonferenza di centro P_0 e raggio r si rappresenta con

$$\begin{cases} x = x(t) = x_0 + r \cos(t), \\ y = y(t) = x_0 + r \sin(t) \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi).$$

In maniera simile, dati $P_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ed $a, b > 0$, l'ellissi di semiassi a e b , centrata in P_0 e simmetrica rispetto agli assi coordinati, si rappresenta parametricamente con

$$\begin{cases} x = x(t) = x_0 + a \cos(t), \\ y = y(t) = x_0 + b \sin(t) \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi).$$

Una curva più originale è quella data da $\phi(t) = (t^2, t^3)$ con $t \in [-1, 1]$. Il grafico presenta una *cuspidè* nel punto $(0, 0)$. Si noti che, dato che $\phi'(t) = (2t, 3t^2)$, la condizione (43) non è soddisfatta in $t = 0$. La curva in esame, quindi, non è regolare. Si tratta, comunque, di una curva regolare a tratti, con $S = \{0\}$.

Tanto per gradire, vediamo anche un esempio di curva nello spazio tridimensionale. Dati $a > 0$ e $r > 0$, la curva parametrizzata data da

$$\begin{cases} x = x(t) = r \cos(t), \\ y = y(t) = r \sin(t), \\ z = z(t) = at \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

ha come supporto un'elica circolare che si avvolge attorno all'asse z . A seconda della scelta di a , l'elica è più o meno ripida. Dato che $\phi'(t) = (-r \sin t, r \cos t, a) \neq 0$ per ogni t , la curva è regolare.

Lunghezza di curve. Il concetto di lunghezza è intuitivo: immaginando una curva come un oggetto deformabile, basta “raddrizzare” tale oggetto e confrontarlo con l’unità di misura prescelta. Ma, come nel caso degli integrali definiti, occorre dare una definizione rigorosa di lunghezza di una curva che, auspicabilmente, ne permetta anche il calcolo esplicito, almeno in un certo numero di situazioni semplici. Come procedere?

Nella costruzione dell’integrale, abbiamo ricondotto il calcolo di un’area con un bordo curvilineo a quello di insiemi dati da unioni di rettangoli, passando poi al limite in maniera opportuna. Nel caso di curve, l’idea naturale è di utilizzare come approssimanti le poligonal. In effetti, scegliendo un numero finito di punti della curva e considerando la poligonale determinata da tali punti, si ottiene una nuova curva la cui lunghezza è minore o uguale della lunghezza della curva originale in esame. La lunghezza della curva è data dall’estremo superiore delle lunghezze di tali poligonal approssimanti. Vediamo di formalizzare precisamente quanto descritto.

Consideriamo, una curva parametrizzata regolare ϕ definita in $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$. Data la partizione $\pi = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b\}$, in corrispondenza dei quali saranno assegnati sulla curva i punti $P_i = \phi(t_i)$. I punti P_0, P_1, \dots, P_n definiscono la poligonale $S(\pi)$ la cui lunghezza $\ell(\phi, \pi)$ è data da

$$\ell(\phi, \pi) = \sum_{k=0}^{n-1} |P_{k+1} - P_k|_d = \sum_{k=0}^{n-1} |\phi(t_{k+1}) - \phi(t_k)|_d.$$

DEFINIZIONE 4.5. *La lunghezza ℓ di una curva parametrizzata regolare a tratti $\phi : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ è data da*

$$\ell(\phi) := \sup\{\ell(\phi, \pi) : \pi \text{ partizione di } [a, b]\}.$$

Le curve regolari hanno tutte lunghezza finita. Infatti, dato che la funzione ϕ appartiene a $C^1([a, b]; \mathbb{R}^d)$, le componenti ϕ_i sono di classe C^1 ed hanno quindi derivata limitata. Sia $M > 0$ tale che $|\phi'_i(t)| \leq M$ per ogni $t \in [a, b]$ e per ogni $i \in \{1, \dots, d\}$. Dati $t, \tau \in [a, b]$, applicando il Teorema di Lagrange, si deduce

$$|\phi(t) - \phi(\tau)|_d = \left(\sum_{k=1}^d (\phi_k(t) - \phi_k(\tau))^2 \right)^{1/2} \leq M\sqrt{d}|t - \tau|.$$

Data la partizione $\pi = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b\}$, si ha

$$\ell(\phi, \pi) = \sum_{k=0}^{n-1} |\phi(t_{k+1}) - \phi(t_k)|_d \leq M\sqrt{d} \sum_{k=0}^{n-1} (t_{k+1} - t_k) = M\sqrt{d}(b - a).$$

L’insieme $\{\ell(\pi) : \pi \text{ partizione di } [a, b]\}$ è quindi superiormente limitato e, di conseguenza, ammette estremo superiore finito. Una curva regolare a tratti può essere

pensata come unione finita di curve regolari e, pertanto, ammette anch'essa lunghezza finita.

La definizione di lunghezza come estremo superiore è pienamente soddisfacente dal punto di vista teorico, ma lascia qualche perplessità dal punto di vista operativo: come calcolare in concreto la lunghezza di una curva?

TEOREMA 4.6. *Sia $\phi : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ una curva parametrizzata regolare a tratti. Vale l'uguaglianza*

$$(44) \quad \ell(\phi) = \int_a^b |\phi'(t)|_a dt.$$

OSSERVAZIONE 4.7. Dato che la funzione ϕ è regolare a tratti e si ha

$$||\phi'(t)|_a - \phi'(t_0)|_a| \leq |\phi'(t) - \phi'(t_0)|_a,$$

è possibile decomporre l'intervallo di integrazione $[a, b]$ in unione finita di sotto-intervalli chiusi in cui la funzione $|\phi'(\cdot)|_a$ è continua. Quindi, la funzione $|\phi'(\cdot)|_a$ è integrabile (secondo Riemann) in $[a, b]$ e l'integrale in (44) è ben definito.

La dimostrazione della relazione (44) si basa sull'approssimazione

$$\phi(\tau) - \phi(t) \approx \phi'(t) (\tau - t) \quad \tau \rightarrow t,$$

che consiste nel sostituire il segmento di estremi $\phi(t)$ e $\phi(t+h)$ con un segmento tangente al supporto della curva in $\phi(t)$ e di lunghezza opportuna. Il seguente Lemma si propone di stimare con precisione l'errore commesso in tale approssimazione, in un caso leggermente più semplice.

LEMMA 4.8. *Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e sia $\phi \in C^1(I; \mathbb{R}^d)$ tale che ϕ' è lipschitziana in I . Allora, esiste $C > 0$ tale che*

$$(45) \quad |\phi(\tau) - \phi(t) - \phi'(t) (\tau - t)|_a \leq C |\tau - t|^2$$

per ogni $t, \tau \in I$.

DIMOSTRAZIONE. Per ogni $i \in \{1, \dots, d\}$, dal Teorema di Lagrange segue

$$|\phi_i(\tau) - \phi_i(t) - \phi'_i(t) (\tau - t)| = |(\phi_i(\sigma_i) - \phi'_i(t)) (\tau - t)|$$

per qualche σ_i compreso tra τ e t . Utilizzando l'ipotesi di lipschitzianità di ϕ' , si deduce che, per qualche $L > 0$, vale

$$(46) \quad |\phi_i(\tau) - \phi_i(t) - \phi'_i(t) (\tau - t)| \leq L |\sigma_i - t| |\tau - t| \leq L |\tau - t|^2.$$

Utilizzando (46), si ottiene

$$|\phi(\tau) - \phi(t) - \phi'(t) (\tau - t)|_a \leq L \sqrt{d} |\tau - t|^2.$$

La dimostrazione è completa. □

Grazie al Lemma 4.8, è possibile dimostrare il Teorema 4.6 supponendo, in aggiunta, ϕ' lipschitziana.

DIMOSTRAZIONE (SEMPLIFICATA) DEL TEOREMA 4.6. Data una partizione π dell'intervallo I , si ha, utilizzando (33) e (45),

$$(47) \quad \begin{aligned} \left| \ell(\phi, \pi) - \sum_{k=0}^{n-1} |\phi'(t_k)|_d (t_{k+1} - t_k) \right| &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| |\phi(t_{k+1}) - \phi(t_k)|_d - |\phi'(t_k)|_d (t_{k+1} - t_k) \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| \phi(t_{k+1}) - \phi(t_k) - \phi'(t_k)(t_{k+1} - t_k) \right|_d \\ &\leq C \sum_{k=0}^{n-1} (t_{k+1} - t_k)^2 \leq C (b - a) |\pi|, \end{aligned}$$

dove $|\pi| := \max_{k \in \{0, n-1\}} (t_{k+1} - t_k)$. Quando l'ampiezza $|\pi|$ della partizione tende a zero, la

lunghezza $\ell(\phi, \pi)$ converge alla lunghezza $\ell(\pi)$, mentre la sommatoria $\sum_{k=0}^{n-1} |\phi'(t_k)|_d (t_{k+1} - t_k)$ tende all'integrale della funzione $|\phi'(t)|_d$ rispetto a t nell'intervallo $[a, b]$. Grazie alla stima (47), ne segue la formula (44). \square

ESEMPIO 4.9. Come prima verifica/applicazione della formula (44), consideriamo la circonferenza parametrizzata da $\phi(t) = (\cos t, \sin t)$ con $t \in [0, 2\pi]$. In questo caso, si ha $\phi'(t) = (-\sin t, \cos t)$ e, di conseguenza, $|\phi'(t)|_d = 1$ per ogni t . Perciò, la lunghezza richiesta è

$$\ell = \int_0^{2\pi} 1 \, dt = 2\pi,$$

coerentemente con quanto noto dalla geometria elementare.

ESEMPIO 4.10. Calcoliamo la lunghezza della curva $\phi(t) = (t^2, t^3)$ con $t \in [-1, 1]$. Dato che $\phi'(t) = (2t, 3t^2)$, la lunghezza della curva è

$$L = \int_{-1}^1 \sqrt{4t^2 + 9t^4} \, dt = \frac{1}{9} \int_4^{13} \tau^{1/2} \, d\tau = \frac{2}{27} (13\sqrt{13} - 8).$$

avendo posto $\tau = 4 + 9t^2$.

ESEMPIO 4.11. Dati $a > 0$ e $r > 0$, consideriamo l'arco di elica descritto dalla parametrizzazione $\phi(t) = (r \cos t, r \sin t, at)$ con $t \in [t_0, t_1]$, $t_0 < t_1$. Dato che $\phi'(t) = (-r \sin t, r \cos t, a) \neq 0$ per ogni t , la lunghezza della curva è data da

$$\ell = \int_{t_0}^{t_1} |\phi'(t)|_d \, dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{r^2 + a^2} \, dt = \sqrt{r^2 + a^2} (t_1 - t_0).$$

dato che $|\phi'(t)|_d = \sqrt{r^2 + a^2}$.

Nel caso di parametrizzazione della forma $\phi(t) = (t, f(t))$ con $t \in [a, b]$, dato che $\phi(t) = (1, f'(t))$, l'espressione per la lunghezza della curva prende la forma

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt,$$

che, quindi, esprime la formula per la lunghezza di un grafico di funzione.

ESEMPIO 4.12 (Lunghezza di un arco di parabola). Sia $f(t) = t^2$ con $t \in [0, a]$ con $a > 0$. La lunghezza del grafico della funzione f è pari a

$$\begin{aligned} \ell &= \int_0^a \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt = \int_0^a \sqrt{1 + 4t^2} dt = \frac{1}{2} \int_0^{\text{settsinh}(2a)} \cosh^2 \tau dt \\ &= \frac{1}{2} \left(\text{settsinh}(2a) + 2a \sqrt{1 + 4a^2} \right), \end{aligned}$$

avendo posto $\tau = \text{settsinh}(2t)$.

ESEMPIO 4.13 (Lunghezza di un arco di curva esponenziale). Sia $f(t) = e^t$ con $t \in [0, a]$ con $a > 0$. In questo caso, la lunghezza del grafico della funzione f è data da

$$\begin{aligned} \ell &= \int_0^a \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt = \int_0^a \sqrt{1 + e^{2t}} dt = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^{2a}}} \left(1 + \frac{1}{\tau^2 - 1} \right) dt \\ &= \tau + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\tau - 1}{\tau + 1} \right) \Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^{2a}}} = \sqrt{1 + e^{2a}} + a - \sqrt{2} + \ln \left(\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{1 + e^{2a}} + 1} \right) \end{aligned}$$

avendo posto $\tau = \sqrt{1 + e^{2t}}$ ed avendo applicato qualche trattamento cosmetico...

Cambiamenti di parametro. La lunghezza della curva è un concetto *intrinseco*, cioè non dipende dalla particolare scelta della parametrizzazione: uno stesso tragitto, anche se percorso con velocità diverse, indica sul contachilometri la stessa lunghezza di strada. Formalizziamo precisamente la questione.

DEFINIZIONE 4.14. Due curve regolari $\phi \in C^1([a, b]; \mathbb{R}^d)$ e $\psi \in C^1([\alpha, \beta]; \mathbb{R}^d)$ si dicono **equivalenti** se esiste una funzione reale di variabile reale $g \in C^1([\alpha, \beta]; [a, b])$ biunivoca tale che $g'(\tau) \neq 0$ per ogni τ e

$$(48) \quad \psi(\tau) = \phi(g(\tau)) \quad \forall \tau \in [\alpha, \beta].$$

In concreto, la funzione g consiste in una *riparametrizzazione* della curva: lo stesso supporto viene descritto sia dal parametro t che dal parametro τ e la funzione g definisce la corrispondenza tra i due parametri. In termini cinematici, le due funzioni ϕ e ψ corrispondono a due leggi orarie distinte e la funzione g mette in corrispondenza istanti relativi alla stessa posizione.

Derivando rispetto a τ la relazione (48), si deduce

$$\frac{d\psi}{d\tau} = \frac{d\phi}{dt} \frac{dg}{d\tau},$$

che descrive la relazione che intercorre tra i vettori velocità delle due curve. Utilizzando la formula 44 per la curva ψ ed introducendo la variabile $t = g(\tau)$, si ottiene

$$\ell(\psi) = \int_{\alpha}^{\beta} \left| \frac{d\psi}{d\tau} \right|_a d\tau = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} \left| \frac{d\phi}{dt} \right|_a \frac{|g'|}{g'} dt$$

Dato che $g' \neq 0$ per ogni τ , la funzione g' o è sempre strettamente positiva o è sempre strettamente negativa. Nel primo caso, si ha $g(\alpha) = a$ e $g(\beta) = b$, quindi

$$\ell(\psi) = \int_a^b \left| \frac{d\phi}{dt} \right|_a dt = \ell(\phi).$$

Se $g' < 0$, si ha $g(\alpha) = b$ e $g(\beta) = a$, quindi

$$\ell(\psi) = \int_b^a \left| \frac{d\phi}{dt} \right|_a \frac{-g'}{g'} dt = - \int_b^a \left| \frac{d\phi}{dt} \right|_a dt = \int_a^b \left| \frac{d\phi}{dt} \right|_a dt = \ell(\phi).$$

Quindi, le formule precedenti mostrano che *curve equivalenti hanno la stessa lunghezza*. Oltre a dare ulteriore conforto e coerenza alla definizione di lunghezza espressa in (44), la precedente affermazione permette di scegliere la parametrizzazione che si preferisce nel calcolo della lunghezza di una curva.

Gli insiemi connessi. Una proprietà significativa degli insiemi di \mathbb{R}^d è quella di essere *connessi*, cioè composti da un singolo pezzo. Sinonimi del vocabolo “connesso” sono i termini “congiunto”, “allacciato”, perciò una maniera per formalizzare tale concetto è di richiedere che ogni coppia di punti dell’insieme possa essere collegata da un percorso interamente contenuto nell’insieme stesso. A seconda del tipo di percorsi ammissibili per realizzare tale collegamento tra punti, si utilizzano terminologie diverse.

La versione più semplice di tutte è quella che considera come unici percorsi ammissibili i segmenti.

DEFINIZIONE 4.15. *Un insieme $S \subset \mathbb{R}^d$ è convesso se, per ogni $P, Q \in S$, si ha*

$$tP + (1-t)Q \in S \quad \forall t \in [0, 1],$$

cioè se il segmento di estremi P e Q è interamente contenuto in S .

ESEMPIO 4.16. Ecco un piccolo elenco di insiemi convessi “facili”:

- gli intervalli in \mathbb{R} ;
- i sopragrafici di funzioni convesse, cioè gli insiemi della forma $S = \{(x, y) : y \geq f(x)\} \subset \mathbb{R}^2$, per $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convessa;
- i rettangoli nel piano, cioè insiemi della forma $[a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$;

- i parallelepipedi nello spazio, cioè insiemi della forma $[a, b] \times [c, d] \times [e, f] \subset \mathbb{R}^3$;
- gli intorni di un punto, cioè insiemi della forma $\{P \in \mathbb{R}^d : |P - P_0|_d < r\}$ con $P_0 \in \mathbb{R}^d$ e $r > 0$.

OSSERVAZIONE 4.17. Se $S_1 \subset \mathbb{R}^{d_1}$ e $S_2 \subset \mathbb{R}^{d_2}$ sono due insiemi convessi, anche l'insieme $S := S_1 \times S_2 \subset \mathbb{R}^{d_1+d_2}$ è convesso. Infatti, siano $P = (x_P, y_P), Q = (x_Q, y_Q) \in \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$ due punti dell'insieme $S := S_1 \times S_2$. Dato che i punti x_P, x_Q appartengono ad S_1 , il punto $tx_P + (1-t)x_Q$ appartiene ad S_1 per ogni $t \in [0, 1]$. Analogamente, dato che i punti y_P, y_Q appartengono ad S_2 , anche il punto $ty_P + (1-t)y_Q$ è in S_2 . Di conseguenza, il punto $tP + (1-t)Q = (tx_P + (1-t)x_Q, ty_P + (1-t)y_Q)$ appartiene a $S_1 \times S_2$ per ogni $t \in [0, 1]$.

ESERCIZIO 4.18. Siano A e B due insiemi convessi di \mathbb{R}^n . L'insieme $A \cup B$ è convesso? L'insieme $A \cap B$ è convesso?

La convessità è una richiesta molto forte. Tanto forte che basta apportare piccole modifiche ad un insieme convesso per ottenere un insieme non convesso. Ad esempio, se $S \subseteq \mathbb{R}^d$ è un insieme convesso e P_0 è interno ad S , l'insieme $S \setminus \{P_0\}$ non è convesso. Infatti, se $r > 0$ è tale che $I_r(P_0) \subset S$ e $v \in \mathbb{R}^d$ è un qualsiasi vettore tale che $|v|_d < r$, i due punti $P_{\pm} := P_0 \pm v$ appartengono ad $S \setminus \{P_0\}$, ma, dato che $tP_- + (1-t)P_+ = P_0 + (1-2t)v$ coincide con P_0 per $t = 1/2$, il segmento che li congiunge non è interamente contenuto nello stesso insieme. In generale, tutto le volte che si crea un buco in un insieme convesso eliminando un sottoinsieme interno si ottiene un insieme non convesso.

Una condizione più flessibile della convessità è espressa dalla prossima definizione.

DEFINIZIONE 4.19. Un insieme S si dice **connesso per poligonalità** se per ogni coppia $P, Q \in S$ esiste una poligonale di estremi P e Q interamente contenuta in S .

Tutti gli insiemi convessi sono anche connessi per poligonalità. In questo caso, infatti, basta scegliere come poligonale il segmento che congiunge i due punti P e Q dell'insieme. Esistono anche tantissimi insiemi che sono connessi per poligonalità, ma che non sono convessi. Ad esempio, le corone circolari nel piano, i ferri di cavallo, e tutti gli insiemi ottenibili a partire da un insieme connesso con modificazioni elasto-plastiche, ma senza fratture...

ESEMPIO 4.20. Sia I un intervallo di \mathbb{R} e sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Il sopragrafico $S := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq f(x)\}$ è un insieme connesso per poligonalità. Infatti, dati $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in S$ con $x_1 \leq x_2$, sia $M := \max_{x \in [x_1, x_2]} f(x)$, che esiste finito per il Teorema di Weierstrass. Allora, la poligonale di vertici $P_0 = (x_1, y_1), P_1 = (x_1, M), P_2 = (x_2, M)$ e $P_3 = (x_2, y_2)$ è interamente contenuta in S .

Allo stesso modo, si mostra che il sopragrafico di una funzione superiormente limitata è connesso per poligonalità.

ESEMPIO 4.21. Un insieme convesso a cui siano stati sottratti un punto interno non è più convesso, ma è connesso per poligonalità. Infatti, sia S l'insieme convesso di partenza, sia P_0 interno ad S . Se P, Q sono elementi di S , ci sono due eventualità: o il segmento di estremi P e Q non contiene il punto P_0 , o P_0 appartiene a tale segmento. Nel primo caso non c'è nulla da aggiungere. Nel secondo, occorre costruire una poligonale che connetta P e Q , aggirando il punto P_0 . Volete provvedere voi?

In generale, un insieme convesso a cui siano stati sottratti un numero finito di punti interni è un insieme connesso per poligonalità.

ESERCIZIO 4.22. Trovare un insieme $S \subseteq \mathbb{R}^d$ convesso tale che esista $P_0 \in S$ (non interno ad S) per cui $S \setminus \{P_0\}$ non sia connesso per poligonalità.

ESERCIZIO 4.23. Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$ due insiemi connessi per poligonalità. L'insieme $A \cup B$ è convesso? L'insieme $A \cap B$ è convesso?

Esistono numerosi insiemi fatti di un solo pezzo che non sono connessi per poligonalità: basta pensare ad un arco S di circonferenza. E' evidente che comunque si prendano due punti $P, Q \in S$ non esiste alcuna poligonale di estremi P e Q contenuta in S , per il semplice motivo che non esistono poligonalità contenute in S . Per inserire anche questo tipo di situazione, si introduce un'ulteriore nuova definizione di connesso.

DEFINIZIONE 4.24. Un insieme S si dice connesso per archi se per ogni coppia $P, Q \in S$ esiste una curva $\phi : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ regolare a tratti tale che

$$\phi(a) = P, \quad \phi(b) = Q, \quad \phi(t) \in S \quad \forall t \in [a, b].$$

Dato che le poligonalità sono particolari scelte di curve regolari a tratti, ogni insieme connesso per poligonalità è anche connesso per archi. Tutti gli archi di curva (che non siano poligonalità) sono insiemi connessi per archi (ovviamente), ma non connessi per poligonalità.

CAPITOLO 4

Funzioni di più variabili

1. Questioni elementari

Le funzioni sono algoritmi che fanno corrispondere ad ogni punto di un insieme (l'insieme di definizione) un altro punto di un altro insieme (il codominio). In quel che segue, ci interesseremo al caso in cui l'insieme di definizione I sia un sottoinsieme del dominio \mathbb{R}^d e il codominio sia l'insieme \mathbb{R}^p dove d, p sono numeri interi positivi opportuni. In notazione, consideriamo funzioni della forma seguente

$$f : I \subseteq \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^p.$$

Si tratta di una regola che associa alla variabile indipendente (o *input*) $P \in I$ la variabile dipendente (o *output*) $Q \in \mathbb{R}^p$. Passiamo in rassegna i tipi fondamentali di funzioni di questo genere.

Funzioni reali di una variabile reale: $d = p = 1$. Sono funzioni $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, già stato considerate in lungo e in largo nei Capitoli precedenti.

Le curve: $d = 1, p > 1$. Si tratta di funzioni del tipo $\phi : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$, di cui si è discusso nel Capitolo precedente.

Funzioni reali di più variabili reali: $d > 1, p = 1$. Si tratta di funzioni

$$f : I \subseteq \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}.$$

Nel caso $d = 2$, si tratta di funzioni che fanno corrispondere ai punti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ un numero reale $z = f(x, y) \in \mathbb{R}$; nel caso $d = 3$, sono funzioni che associano ai punti $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ un numero reale $w \in \mathbb{R}$.

In generale, una funzione f da \mathbb{R}^d in \mathbb{R}^p equivale all'assegnazione di p funzioni, indicate con f_1, \dots, f_p , da \mathbb{R}^d in \mathbb{R} che associano al punto $P \in \mathbb{R}^d$ la i -esima coordinata del punto immagine $f(P) = (f(P)_1, \dots, f(P)_p)$ con $i \in \{1, \dots, p\}$:

$$f_i(P) := f(P)_i \quad P \in I \subseteq \mathbb{R}^d.$$

Per questo motivo, le funzioni reali di più variabili reale sono particolarmente interessanti da analizzare e, in quel che segue, ci dedicheremo con particolare attenzione proprio a questa classe.

Le trasformazioni di \mathbb{R}^d in sé: $d = p \geq 1$. Nel caso $d = 2$, si tratta di trasformazioni del piano, cioè di funzioni che fanno corrispondere alla coppia $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ una nuova coppia $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Una trasformazione del piano in sé può essere vista come una coppia di funzioni da $I \subseteq \mathbb{R}^2$ in \mathbb{R} :

$$(x, y) \in I \mapsto u = u(x, y) \in \mathbb{R}, \quad (x, y) \in I \mapsto v = v(x, y) \in \mathbb{R}.$$

In generale, si tratta di trasformazione che associano ad un punto $P = (x_1, \dots, x_d)$ un nuovo punto $Q = (y_1, \dots, y_d)$. Un'ampia classe di trasformazioni di \mathbb{R}^d è quella delle **trasformazioni lineari**, cioè funzioni della forma $f(P) := AP$, dove A è una matrice di dimensione $d \times d$.

Assegnata una funzione specifica, come procedere per riconoscerne le proprietà più significative? Nel caso di funzioni reali di una variabile reale, una strategia abbastanza generale consiste nel rappresentare l'andamento qualitativo della funzione disegnandone il grafico. Cosa cambia quando la dimensione aumenta? Per ora, accontentiamoci del caso di funzioni reali di più variabile reale.

Il primo passo è quello di determinare l'insieme di definizione della funzione, qualora non sia specificato esplicitamente. Una funzione è generalmente assegnata indicando un procedimento di calcolo che può essere applicabile ad alcuni punti di \mathbb{R}^d e non ad altri. Qualora non sia specificato diversamente, l'insieme dei punti P per cui il procedimento relativo alla funzione è ben definito si considera essere l'insieme di definizione della funzione. Ad esempio, consideriamo le funzioni

$$f(x, y) = \frac{1}{x + y}, \quad g(x, y) = \ln(1 - x^2 - y^2), \quad h(x, y) = \sqrt{3x^2 + 2y^2 - 5}.$$

La funzione f è definita in \mathbb{R}^2 privato della retta di equazione $x + y = 0$; la funzione g ha per insieme di definizione I il disco aperto di centro l'origine e raggio 1: $I := \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$; la funzione h è definita in tutto \mathbb{R}^2 privato dell'interno dell'ellisse di equazione $3x^2 + 2y^2 = 5$.

Una volta noti i punti per cui la funzione ha senso, si potrebbe essere interessati ad analizzare, in maniera qualitativa, l'andamento della funzione. Generalizzando la definizione già vista nel caso di funzioni di una variabile reale, si chiama **grafico della funzione f** l'insieme

$$\Gamma_f := \{(P, Q) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} : P \in I, Q = f(P)\}.$$

Nel caso $d = 2$, il grafico di una funzione $z = f(x, y)$ ha, quasi sempre l'aspetto di una superficie dello spazio. Se $d \geq 3$, il grafico è un sottoinsieme di uno spazio con dimensione maggiore o uguale a 4 e, di conseguenza, la sua visualizzazione grafica risulta sensibilmente più complicata... In quel che segue, ci concentriamo principalmente sul caso di funzioni da \mathbb{R}^2 in \mathbb{R} .

Profili altimetrici. Il grafico Γ_f di una funzione f da \mathbb{R}^2 in \mathbb{R} può essere immaginato come una superficie (di montagna o di pianura, a seconda della funzione) su cui si può liberamente passeggiare, trovandosi ad altezza $z = f(x, y)$ non appena le coordinate (cartesiane) della posizione siano date dalla coppia (x, y) .

Uno specifico cammino sul grafico Γ_f è quindi individuato da una legge oraria che associa alla variabile tempo t una corrispondente coppia di coordinate $(x(t), y(t))$. In corrispondenza, all'istante t , ci si trova ad altezza $h(t) := f(x(t), y(t))$. Qualcosa suona familiare... la coppia $(x(t), y(t))$ è una curva a valori nell'insieme di definizione della funzione f e l'altezza h non è altro che la composizione tra la funzione $t \mapsto \phi(t) := (x(t), y(t))$ e la funzione $(x, y) \mapsto z = f(x, y)$. Per coerenza con il punto di vista escursionistico, chiamiamo nel seguito la funzione composta $h = f \circ \phi$ il **profilo altimetrico** di f relativo alla curva ϕ . Un profilo altimetrico fornisce sempre un'informazione parziale relativa alla struttura di un grafico di funzione, dato che si riferisce ad uno specifico cammino tra gli infiniti cammini possibili. Comunque, utilizzando l'informazione relativa ad un certo numero di profili altimetrici, si può sperare di ottenere un'idea qualitativa della struttura globale del grafico di una funzione.

ESEMPIO 1.1. Consideriamo la funzione $f(x, y) = x - y$, definita in tutto \mathbb{R}^2 . Proviamo ad esplorare il grafico di tale funzione considerando una curva della forma $\phi(t) = (t, 0)$ con $t \in \mathbb{R}$. Si tratta quindi di un'esplorazione che consiste nel tenere costante la variabile y e spostarsi nella direzione determinata dall'asse x . Il corrispondente profilo altimetrico è

$$h(t) = f(x(t), y(t)) = x(t) - y(t) = t.$$

Al crescere del tempo (e quindi al crescere della variabile x), l'altezza corrispondente cresce in maniera lineare (la funzione h è un polinomio di grado 1). In altre parole, l'intersezione tra il grafico della funzione f e il piano (x, z) nello spazio \mathbb{R}^3 è dato da una retta.

Se consideriamo la curva $\psi(\tau) = (0, \tau)$ con $\tau \in \mathbb{R}$, il profilo altimetrico è

$$h(\tau) = f(x(\tau), y(\tau)) = x(\tau) - y(\tau) = -\tau.$$

Anche in questo caso il profilo altimetrico è dato da un polinomio di grado 1. A differenza del caso precedente, al crescere di τ l'altezza diminuisce.

In generale, considerando una curva della forma della forma $\phi(t) = tv$ con $t \in \mathbb{R}$, dove $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ è un vettore fissato, si ottiene un profilo altimetrico dato da un polinomio di primo grado

$$h(t) = f(x(t), y(t)) = v_1 t - v_2 t + 1 = (v_1 - v_2)t.$$

Tutte le sezioni del grafico della funzione con piani verticali, danno luogo a rette e, quindi, il grafico della funzione è un piano nello spazio.

ESEMPIO 1.2. Consideriamo la funzione $f(x, y) = x^2 + y^2$, definita in tutto \mathbb{R}^2 . Dato un vettore $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ di norma unitaria, consideriamo la curva $\phi(t) = tv$ con $t \in \mathbb{R}$. Il corrispondente profilo altimetrico è

$$h(t) = f(x(t), y(t)) = v_1^2 t^2 + v_2^2 t^2 = (v_1^2 + v_2^2) t^2 = t^2$$

Si tratta cioè di una parabola con concavità rivolta verso l'alto e minimo nel punto $t = 0$. Come si vede, il profilo altimetrico non varia al variare della scelta del vettore unitario v , indice del fatto che il grafico della funzione considerata è *invariante per rotazioni* attorno all'asse z . Il grafico completo si ottiene quindi facendo ruotare il grafico della parabola $z = t^2$ attorno all'asse z ed ha quindi la forma di una scodella (a sezione parabolica) rivolta verso l'alto.

ESEMPIO 1.3. Piccola (ma non tanto...) variante dell'esempio precedente: studiamo la funzione $f(x, y) = x^2 - y^2$, definita in tutto \mathbb{R}^2 . Di nuovo, scegliamo come legge oraria dell'esplorazione la curva $\phi(t) = tv$ con $t \in \mathbb{R}$, dove $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$, $|v|_d = 1$. Si ha

$$h(t) = f(x(t), y(t)) = v_1^2 t^2 - v_2^2 t^2 = (v_1^2 - v_2^2) t^2.$$

In questo caso, a seconda della scelta di v il comportamento del profilo altimetrico varia. Precisamente:

- se $|v_1| > |v_2|$, il profilo è quello di una parabola con concavità verso l'alto e minimo in $t = 0$;
- se $|v_1| = |v_2|$, il profilo è identicamente nullo;
- se $|v_1| < |v_2|$, il profilo è quello di una parabola con concavità verso il basso e massimo in $t = 0$.

Inoltre, la convessità è massima per $v = (\pm 1, 0)$ e minima per $v = (0, \pm 1)$. Il grafico della funzione f ha la forma di una **sella**.

ESEMPIO 1.4. Studiamo la funzione

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad (x, y) \neq (0, 0).$$

Consideriamo come curve di percorrenza della superficie, le rette per l'origine, espresse dalle funzioni $\phi(t) = tv$ con $t \in \mathbb{R}$, dove $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$, $|v|_d = 1$. Il profilo altimetrico è

$$h(t) = f(v_1 t, v_2 t) = \frac{v_1 v_2}{v_1^2 + v_2^2} = v_1 v_2.$$

L'altezza di ogni singolo profilo è costante, con altezza dipendente dalla retta scelta. Il grafico è rappresentato in Figura 1.

I profili altimetrici possono essere considerati anche per funzioni di d variabili con $d \geq 2$. Date una funzione $f : I \subseteq \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ e una curva $\phi : J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ tale che

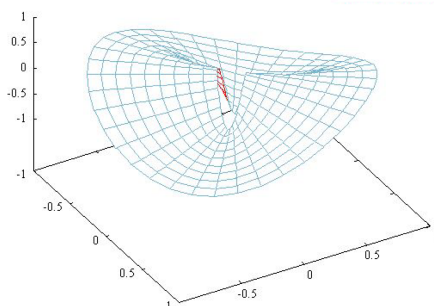


FIGURA 1. Il grafico della funzione $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$.

$\phi(J) \subset I$, la funzione composta $f \circ \phi : J \subseteq \rightarrow \mathbb{R}$ si chiama **profilo altimetrico** della funzione f lungo la curva ϕ .

Curve di livello. Tra i profili altimetrici di una funzione data, ne esistono alcuni particolarmente interessanti: sono quelli costanti. Una maniera alternativa per rappresentare una funzione $f = f(x, y)$ è quello di disegnare nel piano (x, y) gli insiemi di livello $\gamma_1 := \{(x, y) : f(x, y) = 1\}$, $\gamma_2 := \{(x, y) : f(x, y) = 2\}$, $\gamma_3 := \{(x, y) : f(x, y) = 3\}, \dots$ e, in generale, $\gamma_c := \{(x, y) : f(x, y) = c\}$ con $c \in \mathbb{R}$. Tale metodo, detto **metodo delle linee di livello**, è quello utilizzato nelle carte geografiche¹.

Determinare insiemi di livello di una funzione è, in qualche modo, un procedimento inverso a quello dei profili altimetrici: data la costante c , si cercano tutti i percorsi possibili che diano come profilo altimetrico il valore costante c .

ESEMPIO 1.5. Consideriamo, di nuovo, la funzione $f(x, y) = x - y$. Dato il livello $c \in \mathbb{R}$, l'insieme $\gamma_c := \{(x, y) : f(x, y) = c\}$ è determinato da

$$x - y = c \quad \iff \quad y = x - c.$$

Si tratta quindi di rette parallele alla bisettrice del primo e terzo quadrante. Il fatto che variazioni di livello c uguali corrispondano a traslazioni uguali, si traduce nel fatto che la pendenza della superficie è sempre la stessa.

ESEMPIO 1.6. Gli insiemi di livello della funzione $f(x, y) = x^2 + y^2$ sono particolarmente semplici: data $c \geq 0$, si ha $\gamma_c := \{(x, y) : x^2 + y^2 = c\}$, si tratta cioè di circonferenze centrate nell'origine e di raggio \sqrt{c} . Per $c < 0$, l'insieme γ_c è vuoto. Dalla

¹Per arricchire la rappresentazione delle linee di livello, in topografia, si utilizzano anche scale cromatiche che rappresentano i rilievi: toni di marrone via via più deciso per le catene montuose, toni di blu sempre più intenso per le profondità degli oceani e così via...

struttura delle curve di livello si riconosce l'invarianza del grafico rispetto a rotazioni attorno all'asse z .

A differenza del caso precedente, a variazioni uguali del livello c non corrispondono variazioni uguali degli insiemi di livello: il raggio della circonferenza γ_c è \sqrt{c} , quindi il raggio cresce più rapidamente in prossimità del punto $(0, 0)$ e sempre più lentamente per valori di c grandi. Nella rappresentazione per curve di livello (che in concreto viene effettuata disegnando un numero finito di curve relative a livelli a distanza costante), si vedrà una minore concentrazione di curve vicino al punto $(0, 0)$. In corrispondenza, il grafico risulta essere meno pendente vicino all'origine e più pendente man mano che ci si allontana dal punto $(0, 0)$.

ESEMPIO 1.7. Consideriamo la funzione $f(x, y) = x^2 - y^2$. L'insieme di livello relativa al livello $c = 0$ è particolarmente semplice: dato che

$$f(x, y) = x^2 - y^2 = (x - y)(x + y),$$

si ha $\gamma_0 = \{y = x\} \cup \{y = -x\}$, cioè l'insieme di livello è dato dalle due bisettrici del piano (x, y) . Scegliendo $c \neq 0$, si ha $\gamma_c = \{x^2 - y^2 = c\}$, il cui grafico nel piano rappresenta una iperbole equilatera con asintoti dati dalle bisettrici $y = \pm x$. Se $c > 0$, l'insieme γ_c è contenuto nella regione $\{|y| < |x|\}$, mentre se $c < 0$, l'insieme γ_c è contenuto nella regione $\{|x| < |y|\}$.

Nel caso di funzioni di più variabili, la definizione di insieme di livello è del tutto analoga. In genere, dato un livello c , l'insieme di livello $\gamma_c = \{P \in \mathbb{R}^d : f(P) = c\}$ è un'unione di superfici di dimensione $d - 1$.

Funzioni con simmetrie. Disegnare il grafico di una funzione che possiede qualche forma di simmetria è, come al solito, più facile. Partiamo da un caso semplice semplice. Data la funzione reale di una variabile reale $F : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, consideriamo la funzione di due variabili reali:

$$f(x, y) = F(x).$$

La funzione f è definita in $I \times \mathbb{R}$, infatti, dato che non c'è dipendenza esplicita dalla variabile y , il valore della seconda coordinata può essere qualsiasi. Inoltre, sempre per l'indipendenza della funzione f dalla variabile y , il grafico Γ_f risulta essere invariante rispetto a traslazioni nella direzione dell'asse y :

$$(49) \quad \Gamma_f + \lambda \mathbf{j} = \Gamma_f \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

dove $\mathbf{j} = (0, 1)$. La proprietà (49) indica che per disegnare il grafico della funzione f basta disegnare il grafico della funzione F nel piano (x, z) e, poi, traslare parallelamente tale grafico nella direzione dell'asse y (vedi Figura 2). Il caso di funzioni della

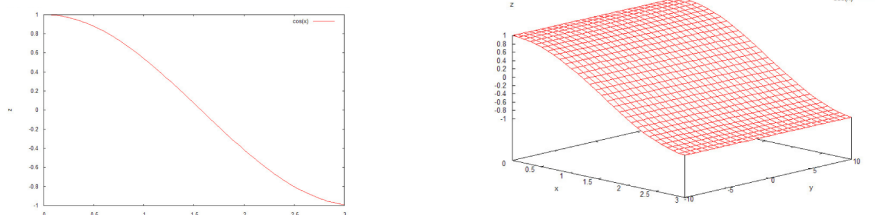


FIGURA 2. Il grafico della funzione $F(x) = \cos x$ e quella della funzione $f(x, y) = \cos x$.

forma $f(x, y) = F(y)$ è del tutto analogo, con l'unica differenza che l'invarianza è nella direzione dell'asse x .

Leggermente più in generale, data una funzione $F : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e date due costanti $a, b \in \mathbb{R}$, non entrambe nulle, si può considerare la funzione di due variabili reali:

$$f(x, y) = F(ax + by).$$

Le curve di livello di una funzione di questo genere sono (unioni di) rette della forma $ax + by = \text{costante}$. Di conseguenza, il grafico della funzione gode dell'invarianza seguente

$$(50) \quad \Gamma_f + \lambda v = \Gamma_f \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

dove $v = (-b, a)$. Per disegnare il grafico della funzione f , basta disegnare il grafico della funzione F in uno qualsiasi dei piani verticali ortogonali alla direzione di invarianza e poi traslare parallelamente nella direzione di v . Sperimentate a vostro gradimento.

Consideriamo un secondo tipo di simmetria. Data $F : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, studiamo la funzione di due variabili reali definita nel modo seguente

$$f(x, y) = F(\sqrt{x^2 + y^2}).$$

Gli insiemi di livello di una funzione di questo genere sono (unioni di) circonferenze centrate in $(0, 0)$. Pertanto il grafico della funzione f risulta essere invariante rispetto a rotazioni attorno all'asse z . Formalmente, definendo

$$A_\theta := \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

la matrice che descrive la rotazione di angolo θ in senso antiorario del piano (x, y) , il grafico della funzione f gode della proprietà

$$(51) \quad A_\theta \Gamma_f = \Gamma_f \quad \forall \theta \in [0, 2\pi).$$

Concretamente, la proprietà (51) indica che per disegnare il grafico della funzione f , basta disegnare il grafico della funzione F nel semipiano (x, z) con $x \geq 0$ e, successivamente, far ruotare tale grafico attorno all'asse z (vedi Figura 3).

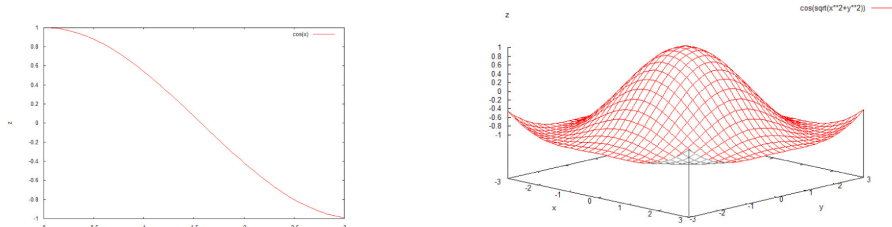


FIGURA 3. Il grafico delle funzioni $F(x) = \cos x$ e $f(x, y) = \cos(\sqrt{x^2 + y^2})$.

Operazioni elementari su grafici. A partire da grafici noti, è possibile dedurre la forma di altri grafici che si ottengono dai primi attraverso un certo numero di operazioni elementari. Qui, consideriamo il caso di dilatazioni/compressioni (o omotetie) e traslazioni.

Supponiamo di conoscere il grafico della funzione $f = f(x, y)$. Dato $\lambda > 0$, il grafico della funzione

$$g(x, y) = f(\lambda x, y)$$

si ottiene a partire dal grafico della funzione f applicando una compressione, nel caso $\lambda > 1$, o una dilatazione, nel caso $0 < \lambda < 1$, nella direzione dell'asse x .

ESEMPIO 1.8. A mo' d'esempio, si considerino i grafici delle funzioni

$$g(x, y) = 4x^2 + y^2, \quad h(x, y) = \frac{x^2}{4} + y^2,$$

che corrispondono, rispettivamente, ad una compressione e una dilatazione del grafico della funzione $f(x, y) = x^2 + y^2$, con fattori $\lambda = 2$ e $\lambda = 1/2$. Gli insiemi di livello delle funzioni g ed h relativi al livello $c = 1$, ad esempio, sono dati da ellissi di equazioni

$$\frac{x^2}{(1/2)^2} + y^2 = 1, \quad \frac{x^2}{2^2} + y^2 = 1,$$

quindi ellissi con assi di simmetria gli assi coordinati x e y , e semiassi di lunghezza $1/2$ e 1 , nel caso della funzione g , e di lunghezza 2 e 1 , nel caso della funzione f .

Considerazioni analoghe possono essere fatte per funzioni della forma

$$g(x, y) = f(\lambda_1 x, \lambda_2 y)$$

con $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ dati. I fattori λ_1 e λ_2 danno luogo a dilatazioni e/o compressioni nelle direzioni degli assi principali, e gli insiemi di livello della funzione g si ottengono a partire da quelli della funzione f applicando le corrispondenti deformazioni.

Continuando a supporre il grafico della funzione f noto, consideriamo una funzione del tipo

$$g(x, y) = f(x + x_0, y + y_0)$$

con $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ dato. Gli insiemi di livello della funzione g sono dati da

$$\begin{aligned} \gamma_c^g &= \{(x, y) : g(x, y) = c\} = \{(x, y) : f(x + x_0, y + y_0) = c\} \\ &= \{(\xi, \eta) : f(\xi, \eta) = c\} - (x_0, y_0) = \gamma_c^f - (x_0, y_0). \end{aligned}$$

avendo posto $(\xi, \eta) = (x + x_0, y + y_0)$. Le curve di livello della funzione g si ottengono per traslazione delle curve di livello della funzione f e, di conseguenza, il grafico della funzione g si ricava da quello della funzione f applicando un'analogia traslazione.

I casi considerati fin qui corrispondono a trasformazioni applicate alla variabile indipendente (x, y) . Analogamente, si può considerare il caso di trasformazioni applicate alla variabile dipendente. Al volenteroso lettore il compito di meditare sui casi

$$g(x, y) = \lambda f(x, y), \quad g(x, y) = f(x, y) + c$$

supponendo il grafico della funzione f noto e $\lambda > 0$, $c \in \mathbb{R}$ assegnati.

2. Le derivate parziali

Un possibile approccio allo studio di funzioni reali di più variabili reali è quello di analizzare i profili altimetrici relativi a percorsi diversi e cercare di “incollare” le informazioni parziali ottenute in questo modo. Il vantaggio di questo punto di vista è che studiare uno specifico profilo altimetrico, vuol dire, in concreto, studiare una funzione reale di variabile reale ed è quindi applicabile tutta la teoria e la tecnica vista nei Capitoli precedenti.

Ad esempio, data una funzione $f : I \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ed un punto $P_0 = (x_0, y_0)$ interno ad I , può essere interessante studiare il comportamento della funzione f lungo le rette passanti per tale punto, ovvero analizzare i profili altimetrici

$$h(t) = f(x_0 + t v_1, y_0 + t v_2)$$

con $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$, $|v|_d = 1$, assegnato. Ad esempio, la monotonia lungo la retta per P_0 e di direzione v è determinata dal segno della derivata della funzione h . A tale derivata, ottenuta considerando la funzione lungo una retta fissata, si dà un nome ben preciso.

DEFINIZIONE 2.1. Sia $f : I \subseteq \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ e sia P_0 un punto interno ad I . Dato $v \in \mathbb{R}^d$, $|v|_d = 1$, si chiama **derivata direzionale** della funzione f nel punto P_0 rispetto alla direzione v il limite seguente

$$\frac{df}{dv}(P_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(P_0 + tv) - f(P_0)}{t}.$$

Scegliendo $v = \mathbf{e}_i$ per qualche i , indicando con $\mathbf{e}_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ uno dei vettori della base canonica, la derivata direzionale si chiama **derivata parziale** della funzione f nel punto P_0 rispetto a x_i . Le derivate parziali si indicano, a seconda dei gusti, con i simboli

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad f_{x_i}, \quad D_{x_i} f, \quad \partial_{x_i} f.$$

Si chiama **vettore gradiente** (o semplicemente **gradiente**) della funzione f , il vettore composto dalle derivate parziali prime

$$\nabla f := (f_{x_1}, \dots, f_{x_n}).$$

Il simbolo ∇ si legge **nabla**.

Il calcolo delle derivate parziali non comporta nessuna difficoltà aggiuntiva rispetto al calcolo delle derivate di funzioni di una variabile. Consideriamo infatti il caso di una funzione di due variabili $f = f(x, y)$. La derivata parziale rispetto alla variabile x è la derivata del profilo altimetrico ottenuto fissando la variabile y e facendo variare la sola variabile x . Pertanto, derivare rispetto ad x corrisponde a derivare la funzione $F(x) = f(x, y)$ dove y è considerato costante. Esempi:

$$\frac{\partial}{\partial x}(x + y^2) = 1, \quad \frac{\partial}{\partial x}(x y^2) = y^2, \quad \frac{\partial}{\partial x}(e^{x y^2}) = y^2 e^{x y^2}.$$

Analogamente:

$$\frac{\partial}{\partial y}(x + y^2) = 2y, \quad \frac{\partial}{\partial y}(x y^2) = 2xy, \quad \frac{\partial}{\partial y}(e^{x y^2}) = 2xy e^{x y^2}.$$

Il calcolo delle derivate direzionali a partire dalla definizione è meno immediato (vedremo più avanti una regola di calcolo, valida per una ampia classe di funzioni, che rende tale operazione molto più semplice). Ad esempio, calcoliamo le derivate direzionali della funzione $f(x, y) = x + y^2$. Dato $v \in \mathbb{R}^2$ con $|v|_2 = 1$, si ha

$$\frac{f(x + t v_1, y + t v_2) - f(x, y)}{t} = \frac{x + t v_1 + (y + t v_2)^2 - x - y^2}{t} = v_1 + 2 v_2 y + t v_2^2,$$

e, passando al limite per $t \rightarrow 0$, si ottiene

$$\frac{df}{dv} = v_1 + 2 v_2 y.$$

Nei casi particolari $v = (1, 0)$ e $v = (0, 1)$, si ottengono nuovamente le derivate parziali rispetto ad x e rispetto ad y .

Analogamente, per $g(x, y) = xy^2$, si ha

$$\begin{aligned} \frac{g(x + tv_1, y + tv_2) - g(x, y)}{t} &= \frac{(x + tv_1)(y + tv_2)^2 - xy^2}{t} \\ &= v_1 y^2 + 2v_2 xy + (v_2^2 x + 2v_1 v_2 y)t + v_1 v_2^2 t^2, \end{aligned}$$

da cui, passando al limite per $t \rightarrow 0$, segue

$$\frac{df}{dv} = v_1 y^2 + 2v_2 xy.$$

Una conseguenza immediata della definizione di derivata direzionale e derivata direzionale è la seguente condizione necessaria per punti estremo relativo.

PROPOSIZIONE 2.2. *Sia $f : I \subseteq \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $P_0 \in I$, interno ad I . Se la funzione f ha un massimo (o un minimo) locale in P_0 , cioè se per qualche $r > 0$ si ha*

$$f(P) \leq (\geq) f(P_0) \quad \forall P \in I, |P - P_0|_d < r,$$

allora tutte le derivate direzionali di f in P_0 , qualora esistano, sono nulle.

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione è particolarmente semplice. Fissata una direzione $v \in \mathbb{R}^2$, $|v|_d = 1$, il profilo altimetrico $h(t) = f(P_0 + tv)$ descrive una funzione reale di variabile reale che ha, per ipotesi, un massimo (minimo) locale in $t = 0$. Di conseguenza, la derivata prima $h'(0)$, se esiste, è nulla. Dato che, per definizione, $h'(0)$ coincide con $\frac{df}{dv}(P_0)$, la proposizione è dimostrata. \square

Operativamente, la precedente Proposizione indica che, nella ricerca di massimi e minimi di una funzione data, occorre considerare come candidati possibili tutti i punti in cui le derivate direzionali, o semplicemente le derivate parziali (più semplici da calcolare!), siano nulle. Torneremo sulla questione tra qualche Capitolo.

Fissata una direzione $v \in \mathbb{R}^d$, la derivata direzionale rispetto alla direzione v è funzione del punto di derivazione e, di conseguenza, è essa stessa, qualora esista una funzione reale di più variabili reali. E' quindi possibile definire le derivate direzionali seconde, cioè le derivate direzionali di una derivata direzionale. Nel seguito, considereremo solamente il caso delle derivate parziali seconde, cioè delle derivate direzionali rispetto agli assi principali ed utilizzeremo notazioni coerenti con quelle utilizzate per le derivate parziali prime. Ad esempio, per le derivate seconde si usa comunemente scrivere

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \quad f_{x_i x_j}, \quad D_{x_i x_j}^2 f, \quad \partial_{x_i x_j} f.$$

Ad esempio, per le funzioni $x + y^2$ e $x y^2$, valgono, rispettivamente, le formule seguenti

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2}(x + y^2) &= 0, & \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}(x + y^2) &= 0, & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(x + y^2) &= 0, & \frac{\partial^2}{\partial y^2}(x + y^2) &= 2, \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}(x y^2) &= 0, & \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}(x y^2) &= 2y, & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(x y^2) &= 2y, & \frac{\partial^2}{\partial y^2}(x y^2) &= 2x. \end{aligned}$$

A voi, il gusto di calcolare tutte le derivate terze delle stesse due funzioni. Una funzione f da \mathbb{R}^d in \mathbb{R} possiede d derivate parziali prime, d^2 derivate seconde e, in generale, d^k derivate parziali k -esime.

DEFINIZIONE 2.3. *La matrice con elementi dati dalle derivate seconde della funzione $f : I \subseteq \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$*

$$d^2 f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_d} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_d \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_d \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_d^2} \end{pmatrix}$$

si chiama *matrice hessiana* (o semplicemente *hessiano*) della funzione f .

Ad esempio, si hanno

$$d^2(x + y^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad d^2(x y^2) = \begin{pmatrix} 0 & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}.$$

Come vedremo più avanti, la matrice hessiana dà informazioni relative alla curvatura del grafico della funzione f .

Guardare ad una funzione di più variabili studiandone profili altimetrici e/o sezioni con piani verticali fornisce informazioni rilevanti, ma resta, purtroppo, un approccio parziale. Ecco due esempi indicativi a riguardo.

ESEMPIO 2.4 (Una retta non basta!). Consideriamo la funzione

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad (x, y) \neq (0, 0).$$

Dato che la funzione non è definita nell'origine, è interessante studiare cosa avvenga in prossimità di tale punto. Consideriamo come profilo altimetrico, quello determinato dall'asse x : data $\phi(t) = (t, 0)$, studiamo

$$h(t) = f(t, 0) = 0 \quad \forall t \neq 0.$$

La funzione è identicamente nulla lungo l'asse delle x e, quindi, tende a 0 lungo tale direzione. Cosa succede se si sceglie una direzione diversa? Dato $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$, $|v|_2 = 1$, lungo $\phi(t) = tv$, si ha

$$h(t) = f(tv_1, tv_2) = v_1 v_2 \quad \forall t \neq 0,$$

come già visto nell'Esempio 1.4. Lungo la direzione determinata dal vettore unitario v , la funzione f tende al valore $v_1 v_2$. Direzioni diverse danno luogo a limiti diversi.

ESEMPIO 2.5 (Tutte le rette non bastano!). Come secondo esempio, consideriamo la funzione

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \quad (x, y) \neq (0, 0).$$

Dato $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$, $|v|_2 = 1$, lungo $\phi(t) = tv$, il profilo altimetrico è dato da

$$h(t) = f(tv_1, tv_2) = \frac{t v_1^2 v_2}{t^2 v_1^4 + v_2^2}. \quad \forall t \neq 0,$$

Per $t \rightarrow 0$, si ha, per ogni scelta del vettore unitario v ,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t v_1^2 v_2}{t^2 v_1^4 + v_2^2} = 0.$$

Lungo tutte le rette per l'origine, la funzione si avvicina al valore 0. Cosa succede lungo altri cammini che passano per l'origine? Consideriamo, ad esempio, la parabola $\phi(t) = (t, t^2)$: si ha

$$h(t) = f(t, t^2) = \frac{t^4}{t^4 + t^4} = \frac{1}{2}. \quad \forall t \neq 0;$$

e lungo le parabole la parabola $\phi(t) = (t, at^2)$, $a \in \mathbb{R}$

$$h(t) = f(t, at^2) = \frac{a^2 t^4}{t^4 + a^2 t^4} = \frac{a^2}{1 + a^2}. \quad \forall t \neq 0,$$

Quindi, percorsi diversi dai percorsi rettilinei portano a valori limite diversi.

La morale è semplice: una funzione di più variabili non può essere semplicemente considerata come l'incollamento delle sue sezioni planari o dei suoi profili altimetrici considerati separatamente. Una visione globale è indispensabile per avere una comprensione globale della funzione considerata. Tale punto di vista globale verrà analizzato a partire dal prossimo Capitolo.

3. Integrali curvilinei

Data una funzione $f : I \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a valori positivi, cioè tale che $f(x, y) \geq 0$ per ogni (x, y) e data una curva $\phi : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $\phi([a, b]) \subset I$, è ben definito il profilo altimetrico $f \circ \phi$. Consideriamo il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, delimitato dall'immagine del profilo $f \circ \phi$ e dal piano $z = 0$, cioè

$$\Sigma_{f,\phi} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) = \phi(t), 0 \leq z \leq f(\phi(t)), t \in [a, b]\}.$$

L'insieme $\Sigma_{f,\phi}$ può essere immaginato come un nastro in \mathbb{R}^3 posato verticalmente sul piano $z = 0$: il supporto della curva ϕ determina la base d'appoggio del nastro ed il profilo altimetrico $f \circ \phi$ ne descrive lo spessore. Qual è l'area di tale insieme?

L'allenamento fatto nella costruzione dell'integrale di Riemann e ripreso successivamente nel calcolo delle lunghezze di curve suggerisce la possibile strategia... Data una partizione $\pi = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$ dell'intervallo $[a, b]$, consideriamo come approssimante dell'area cercata il valore:

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\phi(t_k)) |\phi'(t_k)|_2 (t_{k+1} - t_k).$$

Scegliendo partizioni π con ampiezza infinitesima, si ottiene formalmente l'integrale della funzione $f(\phi(t)) |\phi'(t)|_2$ nell'intervallo $[a, b]$. Dimentichiamo la richiesta di segno e passando a dimensione qualsiasi, si ottiene, in maniera naturale, la seguente definizione.

DEFINIZIONE 3.1. *Data una funzione $f : I \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ e una curva parametrizzata regolare a tratti $\phi : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ tale che $\phi([a, b]) \subset I$, si chiama integrale curvilineo di f lungo ϕ il valore dell'integrale definito (qualora esista)*

$$(52) \quad \int_{\phi} f ds := \int_a^b f(\phi(t)) |\phi'(t)|_d dt.$$

La richiesta che la funzione ϕ sia regolare a tratti, indica che la funzione $|\phi'(t)|_d$ è integrabile secondo Riemann, quindi, affinché l'integrale curvilineo (52) sia ben definito, è sufficiente che il profilo altimetrico $f \circ \phi$ determini una funzione integrabile secondo Riemann.

ESEMPIO 3.2. Consideriamo le funzioni $f(x, y) = x^2 + 4y^2$ e $\phi : [0, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da $\phi(t) = (\cos t, \sin t)$, e calcoliamo l'integrale curvilineo di f lungo ϕ . Utilizzando la formula (52), si ottiene

$$\begin{aligned} \int_{\phi} f ds &= \int_0^{\pi/2} (\cos^2 t + 4 \sin^2 t) \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} dt \\ &= \int_0^{\pi/2} (1 + 3 \sin^2 t) dt = \frac{1}{2} \pi + \frac{3}{4} \pi = \frac{5}{4} \pi. \end{aligned}$$

ESEMPIO 3.3. Consideriamo un caso in dimensione più alta. Sia $f(x, y, z) = y \sin z$ e consideriamo la curva ϕ definita da

$$\phi(t) = (\cos t, \sin t, t) \quad t \in [0, \pi].$$

Si ha

$$\int_{\phi} f ds = \int_0^{\pi} \sin t \sin t \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} dt = \sqrt{2} \int_0^{\pi} \sin^2 t dt = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi.$$

Niente di speciale...

Non fatevi ingannare dai due esempi precedenti: in genere, il calcolo esplicito di un integrale curvilineo è difficile se non infattibile...

La costruzione che abbiamo visto dell'integrale curvilineo lascia sospettare che, cambiando parametrizzazione della curva, il valore dell'integrale curvilineo non cambi. La dimostrazione di tale proprietà è una semplice modifica di quella già vista nel caso della lunghezza di curve. A voi ripercorrerla implementando le modifiche del caso.

Come conseguenza del fatto che l'integrale curvilineo è, in realtà, un integrale di una funzione reale di variabile reale, esso gode delle stesse proprietà viste per l'integrale usuale. Eccole in rapida rassegna.

Linearità. Data una curva ϕ , due funzioni f e g e due costanti $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, se le funzioni f e g sono integrabili lungo ϕ , anche la funzione $\alpha f + \beta g$ è integrabile lungo ϕ e si ha

$$\int_{\phi} (\alpha f + \beta g) ds = \alpha \int_{\phi} f ds + \beta \int_{\phi} g ds$$

Monotonia. Data una curva ϕ e due funzioni f e g , integrabili lungo ϕ e tali che $f \leq g$,

$$\int_{\phi} f ds \leq \int_{\phi} g ds.$$

Additività. Data una curva $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ ed una funzione f , integrabile lungo ϕ , per ogni $c \in (a, b)$, la funzione f risulta integrabile anche lungo ϕ_- e ϕ_+ , dove ϕ_{\pm} indicano le restrizioni di ϕ a $[a, c]$ e $[c, b]$ e si ha

$$\int_{\phi} f ds = \int_{\phi_-} f ds + \int_{\phi_+} f ds.$$

CAPITOLO 5

Funzioni continue

Il concetto di funzione continua è un concetto fondamentale nell'analisi matematica. Abbiamo già esplorato il caso di funzioni reali di una variabile reale. Dedichiamoci ora al caso generale di funzioni a valori vettoriali con variabile vettoriale.

1. Limite di funzioni

Come nel caso di funzioni di una variabile, è possibile definire il concetto di limite per funzioni $f : I \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^p$ con $d, p \in \mathbb{N}$. Il minimo sindacale necessario richiesto per definire il limite della funzione f per $P \rightarrow P^0$ è che il punto P^0 verifichi la proprietà seguente.

DEFINIZIONE 1.1. *Un punto $P^0 \in \mathbb{R}^d$ è un punto di accumulazione di $I \subset \mathbb{R}^d$ se esiste (almeno) una successione $P^n \in I$ con $P^n \neq P^0$ per ogni n , tale che $P^n \rightarrow P^0$ per $n \rightarrow +\infty$.*

In parole povere, si richiede che il punto P^0 sia “avvicinabile” tramite una sequenza di punti in I , diversi da P^0 . Ad esempio, tutti i punti di un insieme aperto, sono anche punti di accumulazione. Anche tutti i punti di frontiera di un insieme assegnato che non appartengano all'insieme stesso, sono punti di accumulazione.

Passiamo alla definizione di limite.

DEFINIZIONE 1.2. *Sia $f : I \subseteq \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^p$ e sia P^0 un punto di accumulazione di I . La funzione f tende a $\ell \in \mathbb{R}^p$ per $P \rightarrow P^0$, se*

$$(53) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad : \quad |f(P) - \ell|_p < \varepsilon \quad \forall P \in I \quad \text{tale che} \quad 0 < |P - P^0|_d < \delta.$$

In tal caso, si scrive $\lim_{P \rightarrow P^0} f(P) = \ell$ o, equivalentemente, “ $f(P) \rightarrow \ell$ per $P \rightarrow P^0$ ”.

Ad esempio, vale il seguente limite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \sin \left(\frac{1}{x^2 + y^2} \right) = 0$$

Infatti si ha, per $|(x, y) - (0, 0)|_2 = \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$,

$$\left| (x^2 + y^2) \sin \left(\frac{1}{x^2 + y^2} \right) - 0 \right| \leq x^2 + y^2 \leq \delta^2.$$

Scegliendo $\delta = \sqrt{\varepsilon}$, si ottiene la proprietà (53).

OSSERVAZIONE 1.3. Nella Definizione 1.2, si considerano punti P tali che $0 < |P - P^0|_d < \delta$. La disuguaglianza a sinistra significa che si considerano soltanto punti P diversi da P^0 . Nel caso in cui la funzione sia definita in tale punto, il valore $f(P_0)$ non fa parte dei valori da considerare; ma la funzione potrebbe anche non essere definita nel punto nel quale si cerca il limite. La situazione, apparentemente paradossale, è proprio la più interessante e comune: di fatto si cerca molte volte il limite di una funzione proprio nei punti in cui essa non è definita.

Una funzione $f : I \subseteq \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^p$ è individuata univocamente dalle sue componenti $f_i : I \subseteq \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, con $i = 1, \dots, p$. L'esistenza del limite della funzione f per $P \rightarrow P^0$ equivale all'esistenza del limite di tutte le componenti f_1, \dots, f_p per $P \rightarrow P^0$ e, inoltre, indicato con $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_p)$ il limite della funzione f , il limite di f_i per $P \rightarrow P^0$ è la componente i -esima ℓ_i del limite ℓ . Infatti, dato che valgono le disuguaglianze

$$|f_i(P) - \ell_i| \leq |f(P) - \ell|_p \leq \sum_{j=1}^p |f_j(P) - \ell_j| \quad i = 1, \dots, p.$$

se $|f(P) - \ell|_p < \varepsilon$, lo stesso vale per $|f_i(P) - \ell_i|$ per ogni i ; e, viceversa, se $|f_i(P) - \ell_i| < \varepsilon$ per ogni i , si ha $|f(P) - \ell|_p < p\varepsilon$. Per questo motivo, senza perdita di generalità, consideriamo, da qui in poi, funzioni a valori reali, cioè funzioni $f : I \subseteq \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$.

Anche per i limiti di funzioni di più variabili valgono le stesse proprietà viste nel caso di limiti di funzioni di una variabile.

PROPOSIZIONE 1.4. *Siano f, g da \mathbb{R}^d in \mathbb{R} tali che $f(P) \rightarrow \ell$ e $g(P) \rightarrow m$ per $P \rightarrow P_0$. Allora*

$$\lim_{P \rightarrow P_0} (f(P) \pm g(P)) = \ell \pm m, \quad \lim_{P \rightarrow P_0} f(P)g(P) = \ell m, \quad \lim_{P \rightarrow P_0} \frac{f(P)}{g(P)} = \frac{\ell}{m},$$

con l'ultimo limite valido solo nel caso $m \neq 0$. Se, inoltre, $f(P) \leq g(P)$ per ogni P in un intorno di P^0 , allora vale la disuguaglianza $\ell \leq m$.

Limiti e profili altimetrici. Nel caso in cui una funzione abbia limite, tutti i profili altimetrici con stesso punto d'arrivo danno come risultato finale lo stesso valore. Lo stesso vale anche per percorsi "a salti", cioè percorsi descritti da una successione di punti nell'insieme di definizione della funzione e convergenti allo stesso punto d'arrivo.

PROPOSIZIONE 1.5. *Sia $f : I \subseteq \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ e sia P^0 un punto di accumulazione di I . Se la funzione f tende a $\ell \in \mathbb{R}$ per $P \rightarrow P_0$, allora*

i. *per ogni $P^n \in I$, $P^n \neq P^0$, tale che $P^n \rightarrow P^0$ per $n \rightarrow +\infty$, si ha*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(P^n) = \ell;$$

ii. per ogni curva $\phi : (a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow I$ continua tale che $\phi(t) \neq P^0$ per ogni $t \in (a, b)$ e $\phi(b) = P^0$, si ha

$$\lim_{t \rightarrow b} h(t) = \ell.$$

dove h è il profilo altimetrico $h = f \circ \phi$.

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione delle due affermazioni è molto simile. Consideriamo quindi solo il caso dei profili altimetrici. Fissata $\phi : (a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow I$ continua tale che $\phi(b) = P^0$, si tratta di mostrare che la distanza $|f \circ \phi(t) - \ell|$ è minore di $\varepsilon > 0$ (arbitrario) per t sufficientemente vicino a b .

Per ipotesi, fissato $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che $|f(P) - \ell| < \varepsilon$ se $|P - P^0|_a < \delta$. Per ottenere $|f \circ \phi(t) - \ell| < \varepsilon$, basta quindi richiedere che valga $|\phi(t) - P^0|_a < \delta$. Tale proprietà è verificata per t sufficientemente vicino a b dato che la curva ϕ è continua in $t = b$ e $\phi(b) = P^0$. \square

OSSERVAZIONE 1.6. La condizione **i.** nella Proposizione 1.5 è anche sufficiente per garantire che la funzione f tende al limite ℓ . Infatti, supponiamo che valga **i.** e che, per assurdo, la funzione f non tenda a ℓ per $P \rightarrow P^0$. Allora, esisterebbe $\varepsilon_0 > 0$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $P^n \in I$ per cui

$$|P^n - P^0|_p < \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad |f(P^n) - \ell|_p \geq \varepsilon_0 > 0.$$

La successione $f(P^n)$ non potrebbe quindi convergere al valore limite ℓ , in contraddizione con l'ipotesi.

Al contrario, la condizione **ii.** nella Proposizione 1.5 non è sufficiente. Potrebbe infatti capitare (eventualità remota, ma possibile!) che non esistano curve in I che passano per il punto limite P^0 . Consideriamo ad esempio una funzione $f : I \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dove $I = \{(x, y) : \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{Q}\}$. L'insieme di definizione della funzione è l'unione delle circonferenze centrate in $(0, 0)$ e di raggio razionale. Non esistono quindi curve con supporto in I che hanno come punto finale il punto $(0, 0)$, quindi la condizione **ii** non dà nessuna informazione relativa al comportamento in tale punto.

La Proposizione 1.5 può essere utilizzata per dimostrare la non esistenza di un limite: basta infatti mostrare l'esistenza di due successioni o di due curve con stesso punto terminale e diverso limite.

ESEMPIO 1.7. La funzione $f(x, y) = \cos(1/(x^2 + y^2))$ non ha limite per $(x, y) \rightarrow (0, 0)$. Infatti, le successioni $P^n = (1/\sqrt{2n\pi}, 0)$ e $Q^n = (1/\sqrt{(2n+1)\pi}, 0)$ tendono a $(0, 0)$ e si ha $f(P^n) = 1 \neq -1 = f(Q^n)$.

ESEMPIO 1.8. La funzione $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ non ha limite per $(x, y) \rightarrow (0, 0)$. Infatti, dato $m \in \mathbb{R}$, lungo le curve $\phi(t) = (t, mt)$ si ha

$$f(t, mt) = \frac{m t^2}{t^2 + m^2 t^2} = \frac{m}{1 + m^2}.$$

Scelte diverse del parametro m danno limiti diversi e, di conseguenza, la condizione **ii.** nella Proposizione 1.5 non è soddisfatta.

Uso delle coordinate polari per il calcolo dei limiti. Il limite di una funzione f per $P \rightarrow P^0$ descrive il comportamento della funzione quando la distanza $|P - P^0|_d$ tende a 0. Una buona strategia per indagare il limite di una funzione è di utilizzare coordinate diverse da quelle cartesiane, individuando punti nello spazio tramite la distanza $\rho := |P - P^0|_d$ e la direzione $\omega := \frac{P - P^0}{\rho}$. Di conseguenza, si ha

$$P = P^0 + \rho\omega.$$

Il vettore ω , che ha, per costruzione, norma unitaria, $|\omega|_d = 1$, vive sulla sfera unitaria di \mathbb{R}^d , ed è quindi individuato da $d - 1$ parametri. Tali parametri sono in genere descritti da angoli (longitudine e latitudine nel caso tridimensionale $d = 3$). Utilizzando le coordinate ρ e ω , si definisce, in maniera naturale, la funzione

$$F(\rho, \omega) := f(P^0 + \rho\omega)$$

che non è nient'altro che la funzione f calcolata nelle nuove variabili. Calcolare il limite di f per $P \rightarrow P^0$ è equivalente a calcolare il limite della funzione F per $\rho \rightarrow 0$?

PROPOSIZIONE 1.9. Siano $f : I \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}, P^0$ un punto di accumulazione di I , $\ell \in \mathbb{R}$. Se esiste una funzione $h = h(\rho)$ tale che $h(\rho) \rightarrow 0$ per $\rho \rightarrow 0$ e

$$(54) \quad |F(\rho, \omega) - \ell|_d \leq h(\rho),$$

allora $f(P)$ tende ad ℓ per $P \rightarrow P^0$.

La dimostrazione (facile) è lasciata all'alacre lettore.

Per capire, in concreto, come utilizzare la Proposizione 1.9, consideriamo il caso bidimensionale: $d = 2$. Studiamo la funzione

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$$

nel punto $(0, 0)$. Introduciamo le coordinate polari centrate in $(0, 0)$

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta.$$

Introducendo nell'espressione di f , si ottiene

$$F(\rho, \theta) = f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = \rho \cos^2 \theta \sin \theta$$

Quindi, si ha

$$|F(\rho, \theta) - 0| = |\rho \cos^2 \theta \sin \theta| \leq h(\rho) := \rho.$$

Dato che h è infinitesima per $\rho \rightarrow 0$, si conclude che

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0.$$

La condizione (54) nella Proposizione 1.9 implica, in particolare, che

$$(55) \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} F(\rho, \omega) = \ell.$$

E' importante osservare, però, che la condizione (54) è più forte della condizione (55). Infatti, la prima indica che la distanza $|F(\rho, \omega) - \ell|_a$ può essere stimata indipendentemente da θ : per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$, *indipendente da θ* , tale che $|F(\rho, \omega) - \ell|_a < \varepsilon$ per ogni $\rho < \delta_\varepsilon$; mentre la seconda assicura che la distanza $|F(\rho, \omega) - \ell|_a$ è piccola per $\rho < \delta' = \delta'(\theta)$. Tale differenza, apparentemente sottile, è fondamentale: la condizione (55) non garantisce che il limite della funzione sia uguale ad ℓ . Pensiamo, infatti, al caso della funzione

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}.$$

Utilizzando le coordinate polari, si trova

$$F(\rho, \theta) = f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = \frac{\rho^2 \cos^2 \theta \sin \theta}{\rho^2 \sin^2 \theta + \cos^2 \theta}$$

Per θ tale che $\cos \theta \neq 0$, si ha

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} F(\rho, \theta) = \frac{\rho^2 \cos^2 \theta \sin \theta}{\rho^2 \sin^2 \theta + \cos^2 \theta} = 0,$$

e per θ tale che $\cos \theta = 0$, vale

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} F(\rho, \theta) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{0}{\rho^2 \sin^2 \theta} = 0.$$

Quindi è soddisfatta la condizione (55). La funzione f non ha limite per $(x, y) \rightarrow (0, 0)$. Infatti, dato che

$$f(x, ax^2) = \frac{a}{1 + a^2},$$

il limite dipende dal particolare percorso prescelto.

2. La continuità

Consideriamo una funzione $f : I \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^p$ con $d, p \in \mathbb{N}$ e fissiamo un punto $P^0 \in I$ che sia un punto di accumulazione di I .

DEFINIZIONE 2.1. Una funzione $f : I \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^p$ è continua in $P^0 \in I$ se $f(P) \rightarrow f(P^0)$ per $P \rightarrow P^0$, cioè se

$$(56) \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 \quad \forall P \in I : |P - P^0|_d < \delta, \quad \text{vale} \quad |f(P) - f(P^0)|_p < \varepsilon.$$

Una funzione non continua in $P^0 \in I$ si dice discontinua in $P^0 \in I$. Se una funzione f è continua in ogni punto $P \in I$, allora si dice che f è continua in I .

Detto alla buona, la funzione f è continua in P^0 se $f(P)$ è una buona approssimazione di $f(P^0)$ quando P è sufficientemente vicino a P^0 . Per passare da una frase euristica e eccessivamente *naïf*, bisogna precisare il significato di “buona approssimazione” di “sufficientemente vicino”.

La definizione è esattamente la stessa del caso delle funzioni reali di variabile reale con un’unica (ragionevolissima) modifica: la distanza tra le variabili indipendenti, P e P^0 , e quelle dipendenti, $f(P)$ e $f(P^0)$, è misurata tramite la norma dello spazio in cui esse si trovano, cioè $|\cdot|_d$ per le prime e $|\cdot|_p$ per le seconde.

OSSERVAZIONE 2.2. *Vicino... ma quanto?* Supponiamo di voler conoscere il valore di $f(P^0)$ con un errore ε ben preciso. Quanto deve essere vicino il punto P al punto P^0 ? La definizione 2.1 garantisce che se il punto P è abbastanza vicino, precisamente se $|P - P^0|_d < \delta$, allora la distanza tra $f(P)$ e $f(P^0)$ è minore di ε . Ma quanto vale esplicitamente δ ? Non è dato sapere... La definizione di continuità garantisce l’esistenza di un opportuno δ , dipendente da ε , ma non ne fornisce una formula esplicita! Si tratta quindi di una definizione di tipo teorico che, così come è, non può essere utilizzata nella pratica per stabilire approssimazioni esplicite.

La continuità è una proprietà che viene preservata sia dalle operazioni di combinazione lineare, che di composizione. Precisamente, vale il seguente risultato.

PROPOSIZIONE 2.3. i. Siano $f, g : I \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^p$ funzioni continue in P^0 . Allora la combinazione lineare $\alpha f + \beta g : I \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^p$ è continua in P^0 , per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
 ii. Siano $f : I \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^p$ e $g : J \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ con $f(I) \subseteq J$ e tali che f è continua in $P^0 \in I$, e g è continua in $f(P^0)$. Allora la funzione composta $g \circ f : I \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^q$ è continua in P^0 .

DIMOSTRAZIONE. i. Indichiamo con δ^f e δ^g i corrispondenti valori di δ dati in (56), per f e per g rispettivamente. Grazie alla disuguaglianza triangolare

$$|(\alpha f + \beta g)(P) - (\alpha f + \beta g)(P^0)|_p \leq |\alpha| |f(P) - f(P^0)|_p + |\beta| |g(P) - g(P^0)|_p \leq (|\alpha| + |\beta|) \varepsilon$$

non appena $|P - P^0|_d < \delta := \min\{\delta^f, \delta^g\}$.

ii. Sia $Q^0 := f(P^0)$. La continuità di f in P^0 e di g in Q^0 indica che

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 \quad \forall P \in I : |P - P^0|_d < \delta, \quad \text{vale} \quad |f(P) - f(P^0)|_p < \varepsilon.$$

$$\forall \eta > 0, \quad \exists \theta > 0 \quad \forall Q \in J : |Q - Q^0|_p < \theta, \quad \text{vale} \quad |g(Q) - g(Q^0)|_q < \eta.$$

Fissiamo $\eta > 0$ qualsiasi e scegliamo, nella prima relazione, $\varepsilon = \theta$. Ponendo $Q = f(P)$ e $Q^0 = f(P^0)$, allora, esiste δ tale che, se $|P - P^0|_d < \delta$ si ha che $|Q - Q^0|_p = |f(P) - f(P^0)|_p < \theta$. Quindi

$$\forall \eta > 0, \quad \exists \delta > 0 \quad \forall P \in I : |P - P^0|_d < \delta, \quad \text{vale} \quad |g \circ f(P) - g \circ f(P^0)|_q < \eta.$$

cioè la funzione $g \circ f$ è continua in P^0 . \square

Interessante proprietà. Manchiamo però ancora di materia prima: quali esempi possiamo produrre di funzioni continue? Partiamo dal caso di funzioni a valori in \mathbb{R} .

ESEMPIO 2.4. Dati $C \in \mathbb{R}$ e $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^d$, sia f la funzione definita da

$$f(P) := C + v \cdot P = C + v_1 x_1 + \dots + v_d x_d.$$

Fissato P^0 , si ha

$$f(P) - f(P^0) = (C + v \cdot P) - (C + v \cdot P^0) = v \cdot (P - P^0).$$

Visto che $|f(P) - f(P^0)| \leq |v|_d |P - P^0|_d$, dato $\varepsilon > 0$, basta scegliere $\delta := |v|_d^{-1} \varepsilon$ per fare in modo che la condizione (56) sia verificata. In particolare, le funzioni $1, x_1, \dots, x_d$ sono tutte funzioni continue.

ESEMPIO 2.5. *Prodotto di funzioni continue.* Il prodotto di funzioni continue dà luogo a funzioni continue. Qui la dimostrazione è leggermente più complicata della precedente. Prima di tutto, osserviamo che vale la seguente affermazione: *se $f : A \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ è continua in P^0 , allora è limitata in un intorno di P^0 , cioè esistono $M, r > 0$ tali che*

$$(57) \quad |f(P)| \leq M \quad \text{per ogni } P \in \{P \in \mathbb{R}^d : |P - P^0|_d < r\} \cap A.$$

Infatti, scegliendo $\varepsilon = 1$ in (56), si deduce

$$|f(P)| = |f(P) - f(P^0)| + |f(P^0)| \leq 1 + |f(P^0)| =: M$$

per $P \in A$ tale che $|P - P^0|_d < \delta$.

Con questa affermazione alla mano, possiamo dimostrare che, date $f, g : A \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni continue in P^0 , anche la funzione prodotto $fg : A \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ è continua in P^0 . Infatti, grazie a (56) e (57), si ha

$$\begin{aligned} |(fg)(P) - (fg)(P^0)| &= |f(P)(g(P) - g(P^0)) + (f(P) - f(P^0))g(P^0)| \\ &\leq |f(P)||g(P) - g(P^0)| + |f(P) - f(P^0)||g(P^0)| \leq (|f(P)| + |g(P^0)|)\varepsilon \end{aligned}$$

per $|P - P^0|_d$ sufficientemente piccolo. Quindi, utilizzando (57), si deduce

$$|(fg)(P) - (fg)(P^0)| \leq (M + |g(P^0)|)\varepsilon$$

per $|P - P^0|_d$ sufficientemente piccolo.

ESEMPIO 2.6. *I polinomi sono funzioni continue.* Dagli esempi precedenti, segue immediatamente che tutti i polinomi di d variabili, x_1, \dots, x_d , e di grado qualsiasi, sono funzioni continue. Si tratta infatti di somme e prodotti di termini del tipo $1, x_1, \dots, x_d$ che sono tutte funzioni continue.

ESEMPIO 2.7. *Le funzioni razionali sono funzioni continue.* Sia $f : A \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ continua in P^0 e sia $f(P^0) \neq 0$. Allora anche la funzione $1/f : A \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ è continua in P^0 . Si tratta infatti della composizione tra la funzione f e la funzione reale di variabile reale $x \mapsto 1/x$. Ricordando quanto detto per i polinomi e per il prodotto di funzioni continue, si deduce che tutte le funzioni razionali sono continue nel loro insieme di definizione.

ESEMPIO 2.8. *La funzione modulo.* Il modulo definisce una funzione $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ attraverso la posizione $f(P) := |P|_d$. Anche questa è una funzione continua, infatti, grazie alla disuguaglianza triangolare, si ha

$$|f(P) - f(P^0)| = \left| |P|_d - |P^0|_d \right| \leq |P - P^0|_d.$$

Quindi, scegliendo $\delta := \varepsilon$, si ottiene (56).

Combinando questi esempi con il risultato generale che garantisce che la composizione preserva la continuità, la classe di esempi di funzioni continue può essere estesa enormemente. Basta infatti ricordare che le funzioni $\sin, \cos, \exp, \ln, \arctan, \dots$ sono funzioni continue. Una qualsiasi composizione di uno di questi oggetti con una funzione razionale, dà luogo ad una funzione continua.

Torniamo al caso generale di funzioni a valori vettoriali:

$$f : A \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^p$$

Una funzione di questa forma è individuata univocamente dalle sue **componenti** f_i , $i = 1, \dots, p$, che associano al punto P le componenti di $f(P)$:

$$f_i(P) := f(P)_i \quad P \in A.$$

Il legame tra la continuità della funzione f e quella delle sue coordinate (che non riserva nessuna sorpresa) è descritto dal risultato seguente, la cui dimostrazione è lasciata come esercizio.

PROPOSIZIONE 2.9. *Sia $f = (f_1, \dots, f_p) : A \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^p$. Allora f è continua in P^0 (in A , rispettivamente) se e solo se le funzioni $f_j : A \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, p$, sono tutte continue in P^0 (in A , risp.).*

La Proposizione 2.9, insieme alle considerazioni fatte in precedenza, permette di trovare un ampio numero di esempi di funzioni continue.

Funzioni lipschitziane. Una sotto-classe di funzioni continue è quella delle funzioni lipschitziane.

DEFINIZIONE 2.10. Una funzione $f : I \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^p$ si dice **lipschitziana** se esiste una costante $L > 0$ tale che

$$(58) \quad |f(P) - f(Q)|_p \leq L|P - Q|_d \quad \forall P, Q \in I,$$

Il prototipo di funzione lipschitziana è la funzione modulo, che è una funzione continua, come mostrato nell'Esempio 2.8. In generale, le funzioni lipschitziane verificano la proprietà (2.1) con la scelta $\delta := \varepsilon/L$.

La combinazione lineare di funzioni lipschitziane è una funzione lipschitziana. Infatti, se $f, g : I \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^p$ sono due funzioni che verifichino (58) con le costanti L_f e L_g , rispettivamente, e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, allora si ha

$$\begin{aligned} |(\alpha f + \beta g)(P) - (\alpha f + \beta g)(Q)|_p &= |\alpha(f(P) - f(Q)) + \beta(g(P) - g(Q))|_p \\ &\leq |\alpha| |f(P) - f(Q)|_p + |\beta| |g(P) - g(Q)|_p \leq (|\alpha| L_f + |\beta| L_g) |P - Q|_d, \end{aligned}$$

per ogni P, Q . Analogamente, la composizione di funzioni lipschitziane è una funzione lipschitziana. A voi giustificare l'affermazione.

In generale, verificare la validità della stima (58) non è particolarmente agevole. Più comodo è utilizzare la seguente condizione sufficiente di lipschitzianità.

TEOREMA 2.11. Siano $f : A \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^p$ e $P^0 \in A$ tale che $D := \{P \in \mathbb{R}^d : |P - P^0|_d < r\} \subseteq A$ per qualche $r > 0$. Se la funzione f è derivabile rispetto ad x_i per ogni $i = 1, \dots, p$ in D e tutte le derivate parziali sono limitate in A , cioè se esiste $M > 0$ tale che

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(P) \right|_p \leq M, \quad \forall P \in A, \quad j = 1, \dots, d,$$

allora f è lipschitziana.

DIMOSTRAZIONE. Grazie alla Proposizione 2.9, basta dimostrare che le singole componenti di f sono continue, perciò consideriamo direttamente il caso $p = 1$. Inoltre, per semplicità di notazione, supponiamo $P^0 = O$ (il caso generale è del tutto analogo).

Per dimostrare l'affermazione, bisogna verificare la stima la differenza $|f(P) - f(O)|$. Indicate con (x_1, \dots, x_n) le coordinate di P , siano

$$P^0 := O, \quad P^j := (x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, x_j, 0, \dots, 0), \quad j = 1, \dots, d-1, \quad P^d := P.$$

Allora, vale l'uguaglianza

$$f(h) - f(O) = \sum_{j=1}^d \left(f(P^j) - f(P^{j-1}) \right)$$

La differenza $f(P^j) - f(P^{j-1})$ è la variazione della funzione di una variabile reale $F(t) := f(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, t, 0, \dots, 0)$ per t che varia da 0 a x_j ; perciò può essere riscritta, grazie al Teorema di Lagrange (per funzioni reali di variabile reale), nella forma

$$f(x^j) - f(x^{j-1}) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, \theta_j x_j, 0, \dots, 0) x_j$$

per qualche $\theta_j \in (0, 1)$. Perciò

$$|f(P) - f(O)| \leq \sum_{j=1}^d \left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, \theta_j x_j, 0, \dots, 0) x_j \right| \leq M \sum_{j=1}^d |x_j| \leq M d |P|_d,$$

da cui segue (58) ponendo $L := Md$. \square

Funzioni discontinue. Con tutti questi esempi di funzioni continue, siamo a corto di esempi di funzioni discontinue. La maniera più semplice per generarne è “incollando” funzioni diverse in regioni diverse. Vediamo qualche esempio tipo.

ESEMPIO 2.12. Il caso più semplice di funzione discontinua è dato dalla funzione $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ definita come segue

$$f(P) := \begin{cases} 0 & P \neq O \\ 1 & P = O. \end{cases}$$

La funzione è discontinua in O dato che la differenza $|f(P) - f(O)|$ è uguale ad 1 per ogni $P \neq O$. In generale, modificando il valore di una funzione continua in un suo punto P^0 , la funzione modificata risulta essere discontinua in tale punto.

ESEMPIO 2.13. Consideriamo un caso di funzione discontinua, pensando, per semplicità, al caso di due variabili. Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) := \begin{cases} 0 & y < 0 \\ 1 & y \geq 0. \end{cases}$$

Tutti i punti $(x_0, 0)$ dell'asse x sono punti di discontinuità, infatti $|f(x, y) - f(x_0, 0)| = 1$ per ogni $y < 0$. Analogamente, si possono costruire funzioni che abbiano discontinuità lungo una curva, ad esempio, un grafico di funzione

$$f(x, y) := \begin{cases} 0 & y < h(x) \\ 1 & y \geq h(x). \end{cases}$$

dove $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si suppone continua.

Il lettore volenteroso potrà facilmente immaginare versioni analoghe per funzioni di d variabili.

OSSERVAZIONE 2.14. Quali fenomeni fisici o naturali possono ragionevolmente essere descritti da funzioni continue? E quali da funzioni discontinue? La continuità è un'esperienza quotidiana. I profili delle montagne, le variazioni di temperatura di un

liquido, la posizione nello spazio di una noiosa mosca ronzante sono ben descritti da funzioni continue (quali sono le variabili indipendenti e quali quelle dipendenti?). Generalmente, funzioni discontinue compaiono in corrispondenza di fenomeni “catastrofici”. Uno tsunami può, in prima approssimazione, essere descritto da una funzione discontinua: il livello dell’acqua salta di molte decine di metri in uno spazio estremamente piccolo. Analogamente, nello studio dei gas, è ben noto il fenomeno delle **onde di shock**, che consistono in brusche transizioni di densità del gas in zone estremamente limitate nello spazio.

Derivabilità parziale e continuità. Non c’è un legame diretto tra derivabilità parziale e continuità. Ci sono funzioni che non sono continue e che ammettono derivate parziali e funzioni che sono continue e non ammettono derivate parziali.

ESEMPIO 2.15. Consideriamo la funzione

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Tale funzione è derivabile parzialmente in $(0, 0)$ sia rispetto alla x che rispetto alla y . Infatti:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{x} = 0.$$

Analogamente per la derivata parziale rispetto ad y .

Allo stesso tempo, la funzione f non è continua in zero, infatti esistono punti arbitrariamente vicini a $(0, 0)$ in cui la funzione assume un valore “lontano” da 0. Ad esempio,

$$f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}.$$

Di conseguenza, la funzione f è discontinua in $(0, 0)$.

ESEMPIO 2.16. La funzione modulo $P \mapsto |P|_d$ è una funzione continua, ma non è derivabile parzialmente in O . Consideriamo la derivata parziale rispetto alla direzione e^j :

$$\frac{f(O + te^j) - f(O)}{t} = \frac{|O + te^j|_d - |O|_d}{t} = \frac{|t|}{t},$$

che non ammette limite per $t \rightarrow 0$.

L’esistenza e la limitatezza di tutte le derivate parziali implica la lipschitzianità della funzione e quindi la sua continuità, come visto nel Teorema 2.11.

Nell’Esempio 2.15, si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{xy}{x^2 + y^2} \right) = \frac{x^2y + y^3 - 2x^2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^3 - x^2y}{(x^2 + y^2)^2}.$$

In particolare, $\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = \frac{1}{y}$ e la funzione $\frac{\partial f}{\partial x}$ è illimitata in ogni intorno di $(0, 0)$.

3. Teoremi fondamentali per le funzioni continue

Sia $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione assegnata: scelto un insieme $E \subseteq \mathbb{R}$ si chiama controimmagine di E tramite f , l'insieme

$$f^{-1}(E) = \{P \in \mathbb{R}^d : f(P) \in E\}.$$

ESEMPIO 3.1. Sia $f(x, y) = x^2 + y^2$, la contrimmagine dell'intervallo chiuso $[1, 4] \subseteq \mathbb{R}$ tramite f è l'insieme $\{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$, che individua la corona circolare di centro l'origine e raggi $r = 1$ e $R = 2$.

Le contrimmagini di insiemi aperti tramite funzioni continue hanno la proprietà importante di essere insiemi aperti di \mathbb{R}^d : anzi, il test maggiormente utilizzabile per riconoscere che un insieme sia un aperto è riconoscere che esso sia la contrimmagine di un aperto tramite una funzione continua.

TEOREMA 3.2. Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ definita in un insieme aperto A e continua in A . Allora, per ogni aperto $E \subseteq \mathbb{R}$, la contrimmagine $f^{-1}(E)$ è aperta in \mathbb{R}^d .

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo dunque $P_0 \in f^{-1}(E)$ e mostriamo che esso ammette un intorno interamente contenuto in $f^{-1}(E)$.

Dato che E è aperto, esiste un intorno $(k - \varepsilon, k + \varepsilon)$ di $k := f(P_0)$ interamente contenuto in E . Inoltre, dato che f è continua in P_0 e A è aperto, in corrispondenza di ε , esiste un raggio δ tale che se $|P - P_0|_d < \delta$, allora si ha $P \in A$ e $|f(P) - k|_d = |f(P) - f(P_0)|_d < \varepsilon$. Ne segue, in altri termini, che l'intorno di P_0 di raggio tale δ è interamente contenuto in $f^{-1}(E)$. \square

OSSERVAZIONE 3.3. Si noti che, nell'enunciato del Teorema, è richiesto che l'insieme A in cui è definita la funzione f sia un insieme aperto. Si tratta di un'ipotesi sufficiente, senza la quale tuttavia il risultato che $f^{-1}(E)$ sia aperto potrebbe perdersi.

Si pensi infatti alla funzione $f(x, y) = \sqrt{x + y}$, definita nel semipiano chiuso $\{x + y \geq 0\}$: la contrimmagine della semiretta aperta $E = (-\infty, 1)$ è data da $f^{-1}(E) = \{(x, y) : 0 \leq x + y < 1\}$. Tale insieme non è né aperto né chiuso.

I più famosi aperti di \mathbb{R} sono: tutto \mathbb{R} , le semirette aperte: $(b, +\infty)$ oppure $(-\infty, a)$, gli intervalli limitati aperti (a, b) . In corrispondenza, possiamo ottenere insiemi aperti considerando le contrimmagini tramite funzioni continue degli aperti famosi citati sopra. Ad esempio, scegliendo

- $f(x, y) = ax + by + c$ funzioni lineari, si ottengono semipiani aperti e striscie aperte

- $f(x, y) = x^2 + y^2$, si ottengono cerchi aperti e corone circolari aperte
- $f(x, y) = a^2x^2 + b^2y^2$, si ottengono regioni delimitate da un'ellisse aperte e corone ellittiche aperte,
- $f(x, y) = \pm a^2x^2 \mp b^2y^2$, (segni discordi) si ottengono regioni aperte delimitate da iperboli.

La trasformazione attraverso una funzione continua preserva alcune proprietà relative alla convergenza. In particolare, *una funzione continua trasforma successioni convergenti in successioni convergenti e insiemi compatti in insiemi compatti.*

PROPOSIZIONE 3.4. *Sia $f : A \subset \mathbb{R}^d \subset \mathbb{R}^p$ una funzione continua.*

- Se $P^n \in A$ converge a $P \in A$, allora la successione $f(P^n)$ converge a $f(P)$.*
- Se $K \subseteq A$ è un insieme compatto, allora l'insieme immagine $f(K)$ è compatto.*

DIMOSTRAZIONE. i. Sia $P^n \in A$ tale che $P^n \rightarrow \bar{P}$ per $n \rightarrow +\infty$ e sia f continua in \bar{P} . Fissato $\varepsilon > 0$, sia δ il valore definito dalla condizione di continuità (56). Dato che P^n converge a \bar{P} , esiste \bar{n} tale che $|P^n - \bar{P}|_d < \delta$ per ogni $n \geq \bar{n}$. Di conseguenza,

$$|f(P^n) - f(\bar{P})|_p < \varepsilon \quad \forall n \geq \bar{n}.$$

Quindi, la successione $f(P^n)$ converge a $f(\bar{P})$.

ii. Fissato il compatto K , sia Q^n una successione in $f(K)$. Bisogna mostrare l'esistenza di una sottosuccessione convergente.

In corrispondenza di Q^n , esiste una successione $P^n \in K$ tale che $f(P^n) = Q^n$ per ogni n . Dato che K è compatto, è possibile estrarre una sottosuccessione P^{n_k} convergente ad un qualche $\bar{P} \in K$ per $k \rightarrow +\infty$. Per la proprietà i., la successione $Q^{n_k} = f(P^{n_k})$ converge a $f(\bar{P}) \in f(K)$. \square

Una conseguenza della precedente dimostrazione è il famoso *Teorema di Weierstrass*, relativo alle funzione continue definite su insiemi compatti a valori in \mathbb{R} .

COROLLARIO 3.5 (Teorema di Weierstrass). *Sia $K \subset \mathbb{R}^d$ un insieme compatto e sia $f : K \subset \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora esistono P^{\min} e P^{\max} tali che*

$$(59) \quad f(P^{\min}) \leq f(P) \leq f(P^{\max}) \quad \forall P \in K.$$

DIMOSTRAZIONE. Grazie alla Proposizione 3.4, l'insieme $f(K)$ è chiuso e limitato. Sia $\lambda := \inf f(K)$. La limitatezza di $f(K)$ garantisce che λ è finito, cioè $\lambda \in \mathbb{R}$.

Per definizione di estremo superiore, esiste una successione di numeri reali della forma $f(P^n)$ convergente a λ . Dato che $f(K)$ è anche chiuso, il valore λ appartiene a $f(K)$, cioè esiste $P^{\min} \in K$ tale che $f(P^{\min}) = \lambda$ e, di conseguenza, vale la prima disuguaglianza in (59). Analogamente, si dimostra l'esistenza di $P^{\max} \in K$ tale che valga la seconda. \square

ESEMPIO 3.6. Il problema del massimo o del minimo di una funzione è, generalmente, proposto assegnando una funzione ed un insieme su cui deve essere considerata la funzione stessa. La richiesta del massimo e/o del minimo richiede, come risposta, due numeri reali: il valore del massimo ed il valore del minimo. Può essere richiesto anche di determinare i punti (potrebbero essere più d'uno) in cui la funzione prende il valore massimo e quelli in cui la funzione prende il valore minimo.

Ad esempio, proponiamoci di determinare il massimo e minimo della funzione $f(x, y) = x^2 + y^2$ nell'insieme $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. L'insieme A assegnato è chiuso e limitato e la funzione f è continua in \mathbb{R}^2 , quindi, per il Teorema di Weierstrass, esistono sia il minimo che il massimo: il minimo è 0 ed il massimo è 1. C'è un solo punto di minimo che è l'origine e ci sono più punti di massimo, che sono tutti i punti della circonferenza $x^2 + y^2 = 1$. In questo caso, le risposte sono state fornite in maniera assolutamente naïf: problemi più complessi saranno affrontati con tecniche adeguate nel seguito.

Il teorema d'esistenza degli zeri Il risultato corrisponde all'esistenza di soluzioni $(x, y) \in A$, per l'equazione $f(x, y) = 0$, o in generale,

$$f(x, y) = k$$

La risposta dipende anche qui da

- il tipo di insieme A
- il tipo di funzione f
- il tipo di valore k

TEOREMA 3.7 (Teorema esistenza degli zeri). *Se*

- A è connesso per poligonalità,
- f è continua,

se riesce $f(P_1) < f(P_2)$ in corrispondenza a due punti $P_1, P_2 \in A$ allora per ogni

$$f(P_1) \leq k \leq f(P_2)$$

esiste almeno un punto $Q \in A$ tale che $f(Q) = k$.

Il Teorema 3.7 riconosce che una funzione continua, definita su un insieme connesso per poligonalità, che prenda due valori $f(P_1) < f(P_2)$ prende, di conseguenza, anche tutti i valori intermedi $f(P_1) \leq k \leq f(P_2)$.

Il nome di teorema d'esistenza degli zeri discende dal caso in cui $f(P_1) < 0$ ed $f(P_2) > 0$ nel quale si deduce l'esistenza di almeno un punto $Q \in A$ in cui $f(Q) = 0$, esistenza appunto di uno zero per la funzione.

3.1. Un enunciato alternativo...

TEOREMA 3.8 (Teorema dei valori intermedi). *Se*

- *A é connesso per poligonali,*
- *f é continua,*

l'insieme immagine é un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$.

Si ricorda piú facilmente e... dice esattamente la stessa cosa, aiutandoci a ricordare la proprietá caratteristica degli intervalli $I \subseteq \mathbb{R}$, la loro convessitá

.. se I contiene due numeri α e β contiene, di conseguenza, tutti i γ *intermedi*.

OSSERVAZIONE 3.9. Si tratta ovviamente anche in questo caso di una condizione sufficiente: soddisfatte le tre ipotesi siamo certi che esiste una soluzione per l'equazione $f(x, y) = k$, in mancanza di una o piú d'una di tali ipotesi non possiamo dichiarare che l'equazione non ha soluzioni, possiamo solo... dubitarne!

4. Le conseguenze

I due teoremi precedenti, ?? e 3.7 aiutano a determinare l'insieme immagine di funzioni continue:

- se la funzione continua é definita su un insieme
 - connesso
 - chiuso
 - limitato

allora l'insieme immagine é l'intervallo chiuso e limitato $[m, M]$ avendo indicato con m e M il minimo e il massimo della funzione,

- se la funzione continua é definita su un insieme connesso (ma non anche chiuso e limitato) allora l'insieme immagine rimane un intervallo che però puó essere illimitato o puó non includere gli estremi.

ESEMPIO 4.1. L'insieme immagine della funzione $x^2 + y^2$ considerata definita sul quadrato di estremi l'origine e il punto $(1, 1)$ é l'intervallo $[0, 2]$.

ESEMPIO 4.2. L'insieme immagine della funzione

$$\frac{1}{1 + x^2 + y^2}$$

é l'intervallo $(0, 1]$ che include 1 ma non 0

ESEMPIO 4.3. La funzione

$$\frac{1}{x + y}$$

é definita per $x + y \neq 0$.

L'immagine del semipiano (connesso per poligonalità) $x + y > 0$ é un intervallo (Teorema 3.8).

Poiché tale immagine contiene sia valori positivi molto grandi ¹ sia valori positivi molto piccoli ² non può che essere l'intervallo dei numeri positivi.

Tenuto conto che la funzione non produce mai il valore 0 se ne conclude che l'immagine del semipiano $x + y > 0$ mediante la funzione $1/(x + y)$ é l'intervallo aperto $z > 0$.

Discorso analogo per l'immagine dell'altro semipiano $x + y < 0$: l'immagine é l'intervallo aperto $z < 0$.

Concludendo: l'immagine della funzione

$$f(x, y) = \frac{1}{x + y}$$

definita (ovviamente) per $x + y \neq 0$, insieme non limitato, non chiuso e non connesso é l'insieme $\mathbb{R} - \{0\}$, insieme non limitato, non chiuso, non connesso.

¹valori della funzione su (x, y) vicini alla frontiera

²valori della funzione su (x, y) molto lontano dall'origine